Esame di Stato 2025 suppletiva – Matematica

Problema 1

a)

$f_a(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Deriviamo la funzione per stabilirne l'andamento di monotonia:

$$f_a'(x) = 2xe^{ax+1} + a\left(x^2+1\right)e^{ax+1} = e^{ax+1}\left(ax^2+2x+a\right)$$

La derivata prima si annulla per

$$ax^2+2x+a=0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \mp \sqrt{1-a^2}}{a}$$

Per $-1<a<1$ $f_a'(x)$ si annulla e cambia segno due volte, per cui la funzione $f_a(x)$ presenta due estremi relativi;

per $a=\mp 1$ la derivata prima si annulla per $x=\pm 1$, senza però cambiare segno: in tali punti la funzione presenta un flesso orizzontale, e non ha punti di estremo relativo;

per $(a<-1) \vee (a>1)$ la funzione è monotona, pe cui non presenta estremi relativi.

Deriviamo una seconda voltala funzione pe ricercarne i flessi:

$$f_a''(x) = e^{ax+1}(2ax+2) + ae^{ax+1}\left(ax^2+2x+a\right) = e^{ax+1}\left(a^2x^2+4ax+a^2+2\right)$$

$f_a''(x)$ si annulla per

$$x = \frac{-2a \mp \sqrt{2a^2-a^4}}{a^2} = \frac{-2 \mp \sqrt{2-a^2}}{a}$$

Per $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$ $f_a''(x)$ si annulla e cambia segno due volte, per cui la funzione $f_a(x)$ presenta due flessi;

per $a=\mp\sqrt{2}$ si annulla senza cambiare segno, per cui la funzione non presenta flessi;

per $\left(a<-\sqrt{2}\right) \vee \left(a>\sqrt{2}\right)$ $f_a''(x)$ si annulla mai e la funzione non presenta flessi.

In base a quanto ottenuto, per $a=1$, $f_1'(-1)=f_1''(-1)=0$, per cui la funzione presenta un flesso a tangente orizzontale nel punto di coordinate

$$\left(-1; f_1(-1)\right) = (-1; 2)$$

b)

Sia $f_1(x) = \left(x^2+1\right)e^{x+1}$

$f_1(x)$ è definita in $\mathbb{R}$ e $f_1(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Agli estremi del dominio:

$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2+1)e^{x+1} = 0^+$: y = 0 è asintoto orizzontale sinistro.

$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2+1)e^{x+1} = +\infty$

Utilizziamo i valori della derivata già calcolati al punto a):

$f_1'(x) = e^{x+1}(x^2+2x+1) = (x+1)^2 e^{x+1}$

$f_1'(x)$ si annulla per $x=-1$ ed è strettamente positiva altrove:

$f_1(x)$ è monotona crescente e presenta, come già determinato, un flesso orizzontale in $F(-1;2)$.

$f_1''(x) = e^{x+1}(x^2+4x+3) = (x+1)(x+3)e^{x+1}$

$f_1(x)$ è convessa per $(x<-3)\vee(x>-1)$, concava per $-3<x<-1$ e presenta, oltre al flesso in *F*, un flesso in $F_1(-3;10e^{-2})$.

$f_1(x)$ è monotona, quindi biunivoca, pertanto ammette funzione inversa:

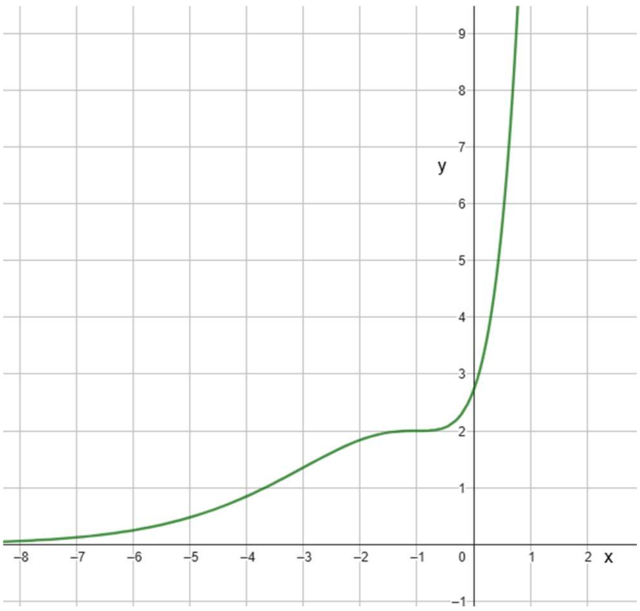
$g(x): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

Determiniamo il punto in cui
$f_1(x) = (x^2+1)e^{x+1} = e$

Risolta immediatamente da $x=0$.

Per il teorema della derivata della funzione inversa,

$$g'(e) = \frac{1}{f_1'(0)} = \frac{1}{e}$$



c)

$F(t) = \int_t^0 f_1(x)\,dx$ con $t \le 0$ rappresenta l'area della parte di piano limitata dal grafico della curva γ_1, dagli assi coordinati e dalla retta $x=t$.

Calcoliamo preventivamente le primitive della funzione $f_1(x)$, integrando due volte per parti:

$$F(x) = \int (x^2+1)e^{x+1}dx = (x^2+1)e^{x+1} - 2\int xe^{x+1}dx = (x^2+1)e^{x+1} - 2xe^{x+1} + 2\int e^{x+1}dx =$$

$$=\left(x^2+1\right)e^{x+1}-2xe^{x+1}+2e^{x+1}=e^{x+1}\left(x^2-2x+3\right)+c$$

Passando al limite richiesto si ha

$$\lim_{t\to-\infty}F\left(t\right)=\lim_{t\to-\infty}\int_t^0\left(x^2+1\right)e^{x+1}\,dx=\lim_{t\to-\infty}\left|e^{x+1}\left(x^2-2x+3\right)\right|_t^0=3e$$

d)

Il punto P_a ha coordinate $P_a\left(x;\left(x^2+1\right)e^{ax+1}\right)$

L'area del rettangolo $P_aQ_aOR_a$ è pertanto:

$$S\left(x\right)=-x\left(x^2+1\right)e^{ax+1}=-\left(x^3+x\right)e^{ax+1}$$

Osserviamo preliminarmente che $S\left(x\right)$ è continua e derivabile nell'intervallo $\left]-\infty;0\right]$, inoltre $S\left(x\right)>0$ per $x<0$ e $\lim_{x\to-\infty}S\left(x\right)=0^+$; ne segue che la funzione $S\left(x\right)$ ammette massimo.

Deriviamo $S\left(x\right)$ per cercarne il massimo:

$$S'\left(x\right)=-\left(3x^2+1\right)e^{ax+1}-a\left(x^3+x\right)e^{ax+1}=-e^{ax+1}\left(ax^3+3x^2+ax+1\right)$$

Imponiamo che $S'\left(-2\right)=0 \quad\Rightarrow\quad -8a+12-2a+1=0 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{13}{10}$

Verifichiamo che si tratta di un massimo, sostituendo ad *a* il valore trovato e studiando il segno di $S'\left(x\right)$:

$$S'\left(x\right)=-e^{\frac{13}{10}x+1}\left(\frac{13}{10}x^3+3x^2+\frac{13}{10}x+1\right)$$

Possiamo scomporre il polinomio in parentesi mediante il teorema di Ruffini:

$$S'\left(x\right)=-e^{\frac{13}{10}x+1}\left(x+2\right)\left(\frac{13}{10}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{10}e^{\frac{13}{10}x+1}\left(x+2\right)\left(13x^2+4x+5\right)$$

Il secondo fattore non si annulla mai, pertanto $S\left(x\right)$ ammette un unico punto stazionario che, per le condizioni di segno individuate, è un punto di massimo.

Problema 2

a)

$f(x)$ è continua in 0, pertanto $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \ln P_2(x) = \ln P_2(x) = 0$ e si annulla per *x* = -1 e *x* = 0.

Ne segue che in tali punti il polinomio $P_2(x)$ assume valore 1, per cui, posto

$P_2(x) = ax^2 + bx + c$ si ha:

$P_2(0) = c = 1$ e

$P_2(-1) = a - b + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = b$; si ha pertanto:

$P_2(x) = a\left(x^2 + x\right) + 1$

La curva γ è tangente alla bisettrice del primo e terzo quadrante nell'origine; $f(x)$ è pertanto derivabile nell'origine e $\lim_{x\to0^-} f'(x) = f'(0) = 1$. Utilizziamo le informazioni già ottenute per determinare il coefficiente *a*:

$$\lim_{x\to0^-} \frac{d}{dx}\ln\left[a\left(x^2+x\right)+1\right] = \lim_{x\to0^-} \frac{a(2x+1)}{a\left(x^2+x\right)+1} = a = 1$$

Si ha quindi $P_2(x) = x^2 + x + 1$

Il polinomio $P_3(x)$ ha uno zero doppio per *x* = 1 e uno semplice per *x* = 0, pertanto può scriversi nella forma:

$P_3(x) = \alpha x(x-1)^2 = \alpha\left(x^3 - 2x^2 + x\right)$

Per la derivabilità in 0 si ha:

$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} a\left(3x^2 - 4x + 1\right) = a = 1$, per cui:

$P_3(x) = x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} & x < 0 \\ 3x^2 - 4x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ si annulla per $x = -\frac{1}{2}$, con minimo relativo e assoluto $\left(-\frac{1}{2};\ln\frac{3}{4}\right)$, desunto dalla figura;

$x = 1$, con minimo relativo $(1;0)$ e $x = \frac{1}{3}$, con massimo relativo $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{27}\right)$

Deriviamo una seconda volta:

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2} & x<0\\ 6x-4 & x>0\end{cases}$$

(evidenziamo che $f(x)$ non ammette derivata seconda in 0.

Nel ramo $x < 0$, $f''(x)$ si annulla per:

$$-2x^2-2x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-1\mp\sqrt{3}}{2}$$

La sola soluzione accettabile, in quanto negativa, è $x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, cui corrisponde il punto di flesso di coordinate $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\ln\dfrac{3}{2}\right)$

Nel ramo con $x < 0$, $f''(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{2}{3}$

cui corrisponde il flesso di coordinate $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{27}\right)$

L'equazione $f(x)=k$ può scriversi nella forma

$$\begin{cases}y=f(x)\\ y=k\end{cases}$$

la cui interpretazione geometrica è l'intersezione tra il grafico γ e il fascio di rette orizzontali $y = k$.

Il numero di soluzioni è pertanto dato da:

$k<\ln\dfrac{3}{4}$ 0 soluzioni

$\ln\dfrac{3}{4}\le k<0$ 2 soluzioni (per $k=\ln\dfrac{3}{4}$ si ha una soluzione con molteplicità 2)

$0\le k\le\dfrac{4}{27}$ 4 soluzioni (per $k=0\vee k=\dfrac{4}{27}$ si hanno due soluzioni distinte e una doppia)

$k>\dfrac{4}{27}$ 2 soluzioni

c)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x^n}$$

che si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Utilizzando il teorema di de l'Hopital, o direttamente con la gerarchia degli infiniti, si ottiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{n\left(x^2+x+1\right)x^{n-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{nx^n}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^n}=\begin{cases}+\infty & n\le 2\\ 1 & n=3\\ 0^+ & n>3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3-2x^2+x}{x^n}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x^n}=\begin{cases}1 & n=1\\ +\infty & n>1\end{cases}$$

Verifichiamo il limite destro per n = 1:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x}$$

il limite si presenta nella forma $0/0$, per cui può essere calcolato utilizzando il teorema di de l'Hopital:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2x+1}{x^2+x+1}=1$$

pertanto per se e solo se n = 1

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$$

d)

γ interseca la bisettrice del primo quadrante nei punti le cui ascisse sono soluzione dell'equazione:

$$x^3-2x^2+x=x\quad\Rightarrow\quad x=0\vee x=2$$

L'area della regione R_1 è pertanto

$$S_1=\int_0^2\left[x-f(x)\right]dx=\int_0^2\left(-x^3+2x^2\right)dx=\left|-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3\right|_0^2=\frac{4}{3}$$

Calcoliamo l'area di R_2:

$$S_2=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=\left|\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{12}$$; Infine:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4/3}{1/12}=16$$

QUESITI

1

Indichiamo con *a* la lunghezza del lato minore *AB* del rettangolo.

SI ha allora: $AD = \varphi a$. Il rettangolo *ABPC'* ha lati $AB = a$ e $AC' = \varphi a - a = (\varphi - 1)a$.

Calcoliamo il rapporto tra il lato maggiore e il lato minore di questo rettangolo:

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{a}{(\varphi-1)a} = \frac{1}{\varphi-1} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

che razionalizziamo, arrivando alla forma

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Utilizziamo le due relazioni:

$AD = \varphi a$ e $AC' = (\varphi - 1)a$; dividendo membro a membro si ottiene:

$$\frac{AD}{AC'} = \frac{\varphi}{\varphi-1} \quad \Rightarrow \quad AD = AC'\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} = (40 \text{ cm})\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = (40 \text{ cm})\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cong 104,7 \text{ cm}$$

2

Le probabilità di Zoe e Eva di realizzare un punto sono rispettivamente

$p_Z = \frac{1}{3}$ e $p_E = \frac{2}{3}$

Le sequenze di lanci che consentono a Zoe di vincere 3-1 sono:

EZZZ, *ZEZZ*, *ZZEZ*

ciascuna delle quali si realizza con probabilità

$$p_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3^4}$$

I tre eventi sono incompatibili, pertanto la probabilità che Zoe vinca 3-1 è pertanto:

$$p = \frac{2}{3^4}\cdot 3 = \frac{2}{27}$$

3

Il numero di modi in cui si possono collocare 4 matite, scelte tra le 9, nel primo cassetto è dato dalle combinazioni di 9 elementi di classe 4: $C_{9,4} = \binom{9}{4}$. Analogamente, possiamo riempire il cassetto *B* scegliendo le due matite, tra le 5 restanti, in $C_{5,2} = \binom{5}{2}$ modi. Il terzo cassetto può essere riempito in un unico modo, con le 3 matite non ancora scelte. Il numero di possibili collocazioni è pertanto:

$$N = \binom{9}{4}\binom{5}{2} \cdot 1 = 1260$$

4

Sostituiamo le equazioni parametriche di *s* nelle equazioni che definiscono *r*:

$$\begin{cases} t-(3-t)-1=0 \\ (1+2t)-(3-t)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=2 \end{cases}$$

Sostituiamo nelle equazioni di *s* per determinare il punto di intersezione delle due rette:

$$A(5;2;1)$$

Scegliamo un punto $R \in r$ (poniamo ad es. *z* =0): $R(4;1;0)$

e un punto $S \in s$ (poniamo ad es. *t* =0): $S(1;0;3)$

Imponiamo quindi il passaggio del generico piano di equazione $ax+by+cz+d=0$ per i punti *A*, R, S:

$$\begin{cases} 5a+2b+c+d=0 \\ 4a+b+d=0 \\ a+3c+d=0 \end{cases}$$

L'equazione del piano risulta

$$\pi : 2x-3y+z-5=0$$

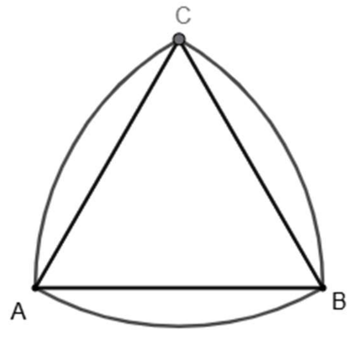
La sfera assegnata ha raggio $CP = r = \sqrt{(5-1)^2+(-7+1)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{14}$

La distanza tra il centro e il piano è:

$$d_{C,\pi} = \frac{|2x_C-3y_C+z_C+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|10+21+2-5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}$$

Poiché $d_{C,\pi} = r$ la sfera è tangente al piano individuato.

5



Ciascuno dei tre archi è sotteso da un angolo al centro di ampiezza $\theta = \frac{\pi}{3}$, per cui ha lunghezza

$$l = L\theta = \frac{\pi}{3}L$$

Il contorno del triangolo di Reuleaux è pertanto:

$p = 3l = \pi L$

L'area di ciascun segmento circolare limitato da uno degli archi e dal lato del triangolo equilatero è data dalla differenza tra l'area del settore circolare di raggio *L* e ampiezza $\theta = \frac{\pi}{3}$, e l'area del triangolo equilatero:

$$s = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3}L^2 - S_{eq} = \frac{\pi L^2}{6} - S_{eq}$$

L'area del triangolo di Reuleaux è la somma dei tre segmenti circolari con l'area del triangolo equilatero:

$$S = 3s + S_{eq} = 3\left(\frac{\pi L^2}{6} - S_{eq}\right) + S_{eq} = \frac{\pi L^2}{2} - 2S_{eq} = \frac{\pi L^2}{2} - 2\frac{\sqrt{3}L^2}{4} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}L^2$$

6

La funzione $g(x)$ è definita nell'insieme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$g(x) = \frac{e^{\sin^2 x - \sin x \cos x} - 1}{x^2}$$

Si annulla per $\sin^2 x - \sin x \cos x = 0$, con $x \in [-\pi; 0[\cup]0; \pi]$:

$$\sin^2 x - \sin x \cos x = \sin x(\sin x - \cos x) = 0$$

Con soluzioni, nell'intervallo di definizione assegnato:

$$x = \pm\pi, \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$$

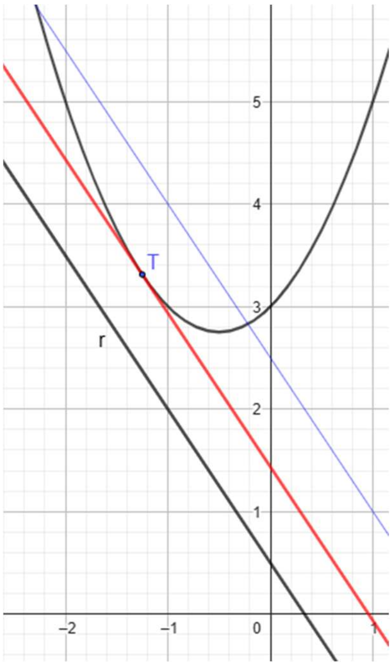
7

Cerchiamo il punto di ascissa *x* nel quale la derivata prima della funzione *y* è uguale alla pendenza della retta *r*:

$$y' = 2x + 1 = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{5}{4}$$

Il punto *T* ha pertanto coordinate: $T\left(-\frac{5}{4}; \frac{53}{16}\right)$.

Consideriamo la parabola *p* e il fascio di rette parallele a *r*, che è esterna alla parabola; partendo da una retta che interseca la parabola in due punti distinti, al diminuire dell'ordinata all'origine, quindi della distanza tra *r* e la retta considerata, i due punti di intersezione tendono ad avvicinarsi, fino a coincidere nel caso della retta tangente (due soluzioni coincidenti); diminuendo ulteriormente l'ordinata all'origine, retta e parabola non hanno punti di intersezione. Ne segue che la retta tangente ha, tra le rette del fascio che intersecano la parabola, la minima distanza da *r*, conseguentemente il punto *T* è il punto della parabola che ha la minima distanza da *r*.



8

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

$\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ non esiste

La prima condizione richiede pertanto $b = c = 0$

Consideriamo la seconda condizione e calcoliamo le primitive della funzione $f(x) = ax\ln x$

$$\int ax\ln x\,dx = a\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx\right] = a\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c\right]$$

Si ha pertanto:

$$\int_1^e ax\ln x\,dx = a\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = a\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right) = a\frac{e^2+1}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4}{e^2+1}$$