Esame di Stato 2025 – Matematica

Problema 1

a)

La funzione $f_k(x)$ può scriversi nella forma

$$f_k(x)=\begin{cases}-kx & x<0\\ kx & x\geq 0\end{cases}$$

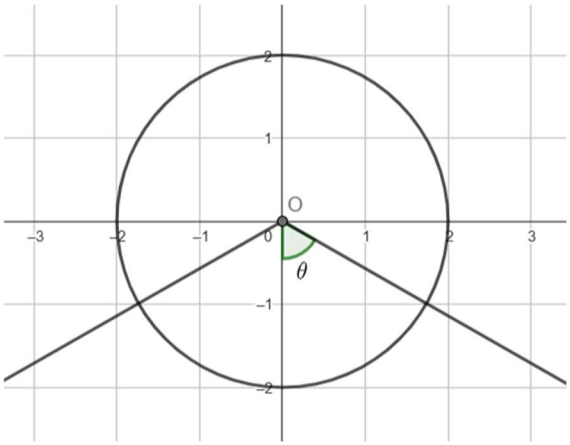
Per cui

$\lim_{x\to 0} f_k(x)=0 \quad \forall k<0$ e

$$f_k'(x)=\begin{cases}-k & x<0\\ k & x>0\end{cases}$$

per cui la funzione è continua ma non derivabile in 0, $\forall k<0$.

Tracciamo i grafici deli circonferenza e funzione, e indichiamo con θ l'angolo formato dalla semiretta nel quarto quadrante con l'asse y negativo



L'area del settore circolare è

$$S=\frac{1}{2}r^2 2\theta=r^2\theta=\pi$$

Mentre il contorno assume valore

$$p=2r+2r\theta=4+\pi$$

Dalla prima condizione otteniamo

$$\theta=\frac{\pi}{r^2}$$

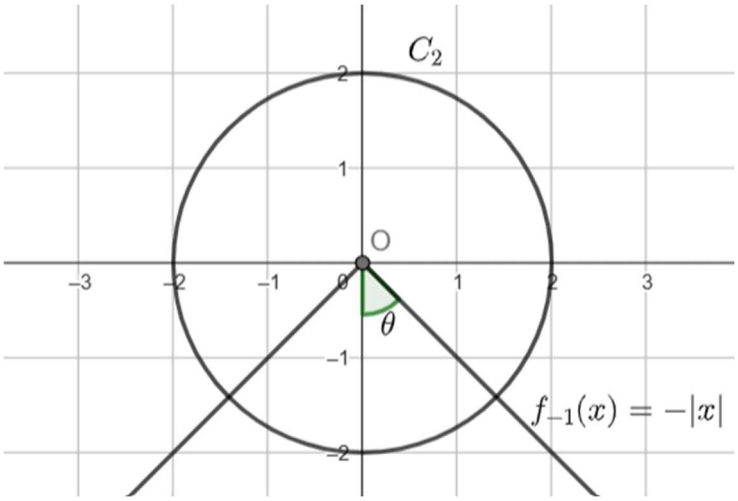
che, sostituita nella seconda, consente di ottenere l'equazione:

$$2r+2r\frac{\pi}{r^2}=4+\pi \quad \Rightarrow \quad 2r^2-(4+\pi)r+2\pi=0$$

Con soluzioni

$$r=\frac{4+\pi\mp\sqrt{(4+\pi)^2-16\pi}}{4}=\frac{4+\pi\mp(4-\pi)}{4}\quad\Rightarrow\quad r_1=\frac{\pi}{2}\vee r_2=2$$

r = 2 è il maggiore dei due raggi; riportiamo i grafici richiesti:



b)

La funzione $g(x)$ può essere scritta nella forma:

$$g(x)=y=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}\\ y\geq 0\end{cases}$$

Elevando al quadrato i due membri:

$$\begin{cases}x^2+y^2=4\\ y\geq 0\end{cases}$$

Il grafico è l'intersezione tra la circonferenza C_2 e il semipiano $y\geq 0$, ovvero la semicirconferenza situata nel primo e secondo quadrante, estremi sull'asse *x* compresi.

Alla luce di tale osservazione, utilizzando le proprietà note della circonferenza, possiamo concludere immediatamente che le proprietà della funzione *g*(*x*) sono:

Dominio: $x\in[-2;2]$

La funzione è pari, quindi simmetrica rispetto all'asse *y*;

La funzione non è derivabile nei punti di ascissa $x=\pm 2$ (punti con tangente verticale);

g(*x*) è crescente per $x\in[-2;0[$, decrescente per $x\in]0;2]$; presenta un massimo in $(0;2)$;

Insieme immagine (codominio): $\mathrm{Im}_g=[-0;2]$.

$g(x)$ non è invertibile in quanto non biunivoca nel suo insieme di esistenza; è invertibile restringendola ai due intervalli di ampiezza massima:

$I_1 = [-2;0]$ e $I_2 = [0;2]$; l'intervallo richiesto è pertanto l'intervallo $I_2 = [0;2]$.

Notiamo che il grafico di $g(x)$ ristretto all'intervallo I_2 è l'arco di circonferenza compreso nel primo quadrante, ovvero è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante del piano cartesiano: tale considerazione è sufficiente per concludere che $g(x)$, in tale restrizione, è inversa di se stessa:

$$h(x) = g^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

La verifica diretta è comunque immediata: è sufficiente esplicitare x dalla definizione di g ed effettuare la sostituzione $x \leftrightarrow y$.

c)

Sia $A\left(x;\sqrt{4-x^2}\right)$ con $0 \le x \le 2$

Il quadrilatero *AMOR* è un rettangolo di area:

$$S_{AMOR} = S = x\sqrt{4-x^2}$$

Notiamo che $S(0) = S(2) = 0$ e che $S(x) > 0$ per $x \neq 0 \wedge x \neq 2$; poiché $S(x)$ è continua, ammette un punto di massimo (teorema di Weierstrass).

Deriviamo S ottenendo:

$$S' = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2\left(2-x^2\right)}{\sqrt{4-x^2}}$$

che si annulla, nell'intervallo di definizione, per $x = \sqrt{2}$; il punto A che individua il quadrilatero di area massima ha pertanto coordinate

$A\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, per cui il quadrilatero di area massima è un quadrato.

Utilizzando nuovamente il punto $A\left(x;\sqrt{4-x^2}\right)$, individuiamo il rettangolo di perimetro massimo:

$$p = 2\left(x + \sqrt{4-x^2}\right)$$

Derivando si ottiene:

$$p' = 2\left(1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}\right)$$

$$p' \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4-x^2} - x \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4-x^2} \ge x$$

Nell'intervallo $0 \le x \le 2$ sono verificate entrambe le condizioni di esistenza e segno della radice, pertanto possiamo elevare al quadrato i due membri, ottenendo:

$$4 - x^2 \ge x^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le \sqrt{2}$$

Il perimetro del rettangolo assume valore massimo quando $A\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, che individua lo stesso quadrato determinato al punto precedente.

d)

$$F(2) = \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - t^2}\, dt$$

Individua l'area della semicirconferenza di centro *O* e raggio 2, pertanto, senza bisogno di svolgere l'integrale,

$$F(2) = \frac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi$$

Studiamo la funzione *F*(x), il cui valore individua l'area della parte di piano compresa tra l'asse *x*, la semicirconferenza C_2 e la retta verticale passante per i punti di ascissa *x*, con $-2 \le x \le 2$.

Sappiamo che

$$F(-2) = 0$$

e, dall'interpretazione geometrica, *F*(x) è monotona crescente, in quanto la funzione integrando non è mai negativa.

$$F'(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad (F'(x) \ge 0 \quad \forall x \in [-2;2])$$

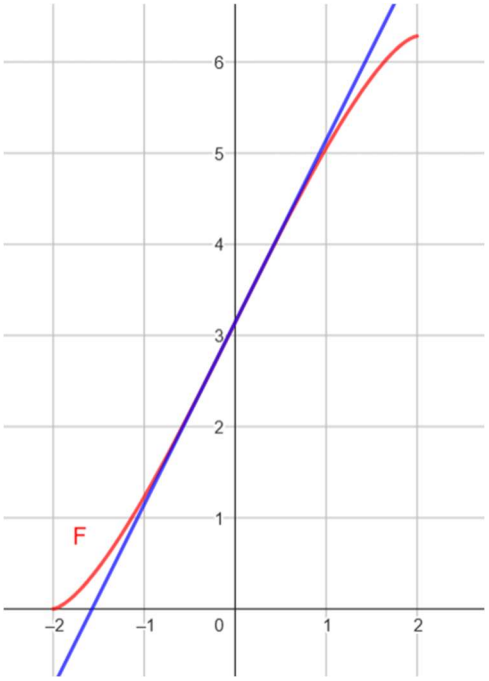
$$F''(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} \quad \Rightarrow \quad F''(x) > 0 \text{ per } x < 0$$

Ne segue che *F*(x) + convessa (concavità verso l'alto) per $x < 0$, concava (verso il basso) per $x > 0$ e ha un flesso per $x > 0$, con $F(0) = \pi$ (area del quadrante della circonferenza).

La tangente nel punto di flesso ha pertanto equazione:

$$y - F(0) = F'(0)(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = 2x + \pi$$

Riportiamo in rosso il grafico della funzione integrale, in blu la tangente inflessionale.



Problema 2

a)

$$f(x)=p(x)e^{p(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=p'(x)e^{p(x)}+p(x)p'(x)e^{p(x)}=p'(x)e^{p(x)}\left[1+p(x)\right]$$

Poiché $p(x)=ax^2+bx+c$, con $a\neq 0$, si ha infine:

$$f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{ax^2+bx+c} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\left(2ax+b\right)e^{ax^2+bx+c}\left[1+ax^2+bx+c\right]$$

Dal grafico sappiamo che $f(0)=f(1)=0$, per cui si ottiene:

$$f(0)=ce^{c}=0 \quad \Rightarrow \quad c=0$$

$$f(1)=(a+b)e^{a+b}=0 \quad \Rightarrow \quad b=-a$$

Inoltre $f'(\varphi)=0$, da cui, utilizzando le condizioni già ottenute:

$$f'(\varphi)=(2a\varphi-a)e^{2a\varphi-a}\left(1+a\varphi^2-a\varphi\right)=a(2\varphi-1)e^{a(2\varphi-1)}\left(1+a\varphi^2-a\varphi\right)=0$$

L'unica soluzione compatibile con le richieste è

$$a=\frac{1}{\varphi(1-\varphi)}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}=-1$$

Per cui il polinomio $p(x)$ è:

$$p(x)=-x^2+x$$

Consideriamo il grafico γ_2:

$$g(x)=q(x)e^{-x^2+x} \quad \Rightarrow \quad g'(x)=q'(x)e^{-x^2+x}+q(x)(-2x+1)e^{-x^2+x}$$

dove $q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, con $\alpha\neq 0$ e $q'(x)=2\alpha x+\beta$

Dal grafico otteniamo:

$$g(0)=\gamma e^{0}=\gamma=1$$

$$g'(0)=q'(0)+q(0)=0 \quad \Rightarrow \quad \beta+1=0 \quad \Rightarrow \quad \beta=-1$$

Infine

$$g(-\varphi)=q(-\varphi)e^{-\varphi^2-\varphi}=0 \quad \Rightarrow \quad q(-\varphi)=\alpha\varphi^2+\varphi+1=0$$

da cui si ottiene:

$$\alpha = \frac{-1-\varphi}{\varphi^2} = \frac{-1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = -1$$

Per cui:

$$q(x) = -x^2 - x + 1$$

b)

Studiamo la funzione

$$f(x) = \left(-x^2 + x\right)e^{-x^2+x}$$

Funzione reale trascendente, definita per $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \left(-x^2 + x\right)e^{-x^2+x} > 0$ per $0 < x < 1$

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \mp\infty} \left(-x^2 + x\right)e^{-x^2+x} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{-x^2 + x}{e^{x^2-x}} =$$

Si tratta di una forma indeterminata ∞ / ∞ ; applicando il teorema di de l'Hopital (o direttamente, utilizzando la gerarchia degli infiniti), si ottiene:

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{-x^2 + x}{e^{x^2-x}} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{-2x+1}{(2x-1)e^{x^2-x}} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{-1}{e^{x^2-x}} = 0^-$$

Per cui la funzione ammette come asintoto l'asse *x*, di equazione $y = 0$.

Deriviamo la funzione per calcolarne i punti stazionari (utilizziamo l'espressione già ottenuta al punto a):

$$f'(x) = \left(1 - x^2 + x\right)\left(-2x+1\right)e^{-x^2+x}$$

che si annulla per $x = \frac{1}{2}$ e $1 - x^2 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$

(la soluzione positiva individua il punto φ già noto dal testo).

Applichiamo alla curva la traslazione orizzontale verso sinistra, di ampiezza ½, le cui equazioni sono:

$$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{2} \\ y' = y \end{cases}$$

Invertendo le equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} x = x' + \frac{1}{2} \\ y = y' \end{cases}$$

Per cui la curva traslata ha equazione:

$$f_1(x) = y' = \left[-\left(x' + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(x' + \frac{1}{2} \right) \right] e^{-\left(x' + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(x' + \frac{1}{2} \right)} = \left(-x'^2 + \frac{1}{4} \right) e^{-x'^2 + \frac{1}{4}}$$

La funzione così ottenuta è pari, quindi simmetrica rispetto all'asse *y*; se ne deduce che la funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = \frac{1}{2}$.

Calcoliamo le ordinate degli estremi di $f(x)$:

possiamo utilizzare la funzione traslata, in modo da semplificare il calcolo (le ordinate dei punti estremi non cambiano):

$$f\left(\frac{1}{2} \right) = f_1(0) = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{4} = \frac{\sqrt[4]{e}}{4} \approx 0,32$$

$$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = f_1\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,37$$

L'insieme immagine di $f(x)$ è pertanto:

$$\mathrm{Im}_f = \left[-\frac{1}{e}; \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} \right]$$

L'equazione $f(x) = k$ equivale al sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = k \end{cases}$$

le cui soluzioni sono le ascisse dei punti di intersezione tra il grafico γ_1 e il fascio di rette orizzontali di equazione *y = k*.

Il numero di soluzioni è pertanto:

per $-\frac{1}{e} \le k < 0$: 4 soluzioni (per $k = -\frac{1}{e}$ si hanno due soluzioni doppie)

per $0 \le k \le \frac{e^{\frac{1}{4}}}{4}$: 2 soluzioni (per $k = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}}$ le due soluzioni coincidono)

per $k < -\frac{1}{e} \vee k > \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}}$: nessuna soluzione

c)

Consideriamo la funzione

$g(x)=\left(-x^2-x+1\right)e^{-x^2+x}$;

$g(x)$ si annulla per

$$-x^2-x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-1\mp\sqrt{5}}{2}$$

La prima soluzione è:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=-\varphi$$

La seconda:

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1}{\varphi}$$

Calcoliamo la pendenza delle rette AC e BC:

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{1-0}{0+\varphi}=\frac{1}{\varphi}$$

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{1-0}{0-\frac{1}{\varphi}}=-\varphi$$

Le due rette hanno pendenza antireciproca, per cui sono perpendicolari, il triangolo ACB è quindi rettangolo in C.

Determiniamo l'intersezione tra le due curve ponendo:

$$f(x)=g(x) \quad \Rightarrow \quad \left(-x^2+x\right)e^{-x^2+x}=\left(-x^2-x+1\right)e^{-x^2+x}$$

che ha soluzione:

$$-x^2+x=-x^2-x+1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

Siano $P_1=\left(x;\left(-x^2+x\right)e^{-x^2+x}\right)$, $P_2=\left(x;\left(-x^2-x+1\right)e^{-x^2+x}\right)$.

Per $x\geq\frac{1}{2}$, $f(x)\geq g(x)$ pertanto il segmento P_1P_2 ha lunghezza:

$$P_1P_2=L(x)=f(x)-g(x)=\left(-x^2+x\right)e^{-x^2+x}-\left(-x^2-x+1\right)e^{-x^2+x}=(2x-1)e^{-x^2+x}$$

Deriviamo $L(x)$ per determinarne il massimo:

$$L'(x)=2e^{-x^2+x}+(2x-1)(-2x+1)e^{-x^2+x}=\left(-4x^2+4x+1\right)e^{-x^2+x}$$

che si annulla per $-4x^2+4x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1\mp\sqrt{2}}{2}$;

la funzione $L(x)$ è crescente per

$\frac{1-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, pertanto presenta un massimo (accettabile) per $x=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

La lunghezza massima del segmento P_1P_2 è pertanto:

$$L_{\max}=L\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}}$$

d)

L'area della regione R richiesta è data dall'integrale definito tra $x=0$ e $x=\frac{1}{2}$; in questo intervallo si ha

$g(x)\geq f(x)$

$$S_R=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[g(x)-f(x)\right]dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)e^{-x^2+x}\,dx=\left|e^{-x^2+x}\right|_0^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{4}}-1$$

Determiniamo la retta di equazione x = t, in modo che determini una regione R' equivalente a R:

Vogliamo che

$$S_{R'}=\int_{\frac{1}{2}}^{t}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_{\frac{1}{2}}^{t}(2x-1)e^{-x^2+x}\,dx=\left|-e^{-x^2+x}\right|_{\frac{1}{2}}^{t}=-e^{-t^2+t}+e^{\frac{1}{4}}=S_R$$

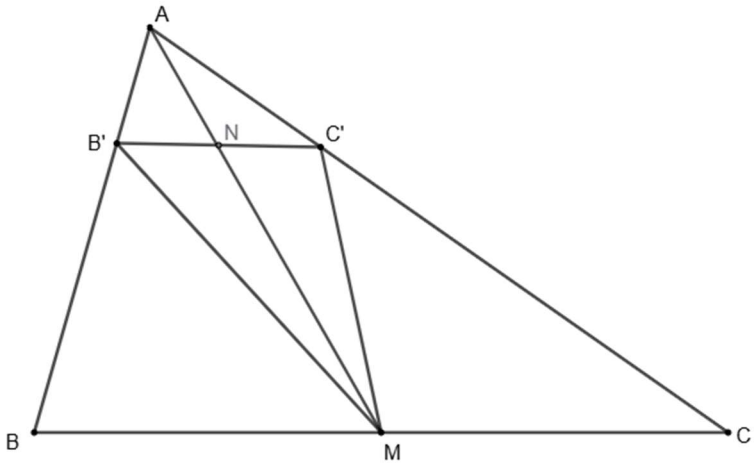
Da cui segue:

$$e^{\frac{1}{4}}-1=-e^{-t^2+t}+e^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad e^{-t^2+t}=1 \quad \Rightarrow \quad -t^2+t=0$$

risolta da *t* = 0 (non accettabile*)* e *t* = 1

QUESITI

1



Il segmento B'C', per il Teorema di Talete, è parallelo al lato BC; ancora come conseguenza del teorema di Talete, il segmento BC interseca AM in N, punto medio di BC (i triangoli ABC e AB'C' sono simili).
Il triangolo MB'C' è isoscele per ipotesi, in quanto $MB' \cong MC'$
MN è mediana relativa alla base, quindi è anche altezza; analogamente, AN è altezza e mediana del triangolo AB'C', che è pertanto isoscele:
$AB' \cong AC'$, poiché $AB' \cong 3AB'$ e $AC \cong 3AC'$ segue immediatamente che $AB \cong AC$

2

La sfera ha centro di coordinate C = (1; 2; 0) e raggio *R* = 1.

La distanza tra il centro e il piano è:

$$D = \frac{|x_C - 2y_C - 2z_C + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 - 4 + d|}{\sqrt{1 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|d - 3|}{3}$$

Il piano è tangente alla sfera quando

$$R = D = \frac{|d-3|}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad d = 0 \vee d = 6$$

È secante quando $D = \frac{|d-3|}{3} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < d < 6$

È esterno per $D = \frac{|d-3|}{3} > 1 \quad \Rightarrow \quad (d < 0) \vee (d > 6)$

Il piano divide la sfera in due parti uguali quando passa per il suo centro; ciò avviene per:

$$D = \frac{|d-3|}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 3$$

3

I due tratti sono continui e derivabili nel loro insieme di definizione.

Verifichiamo la continuità della funzione nel punto *x* = 0:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(-4x^2 - 8x\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[1 + \tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)\right] = 0$$

La funzione è pertanto continua per $x = 0$.

Verifichiamone la derivabilità:

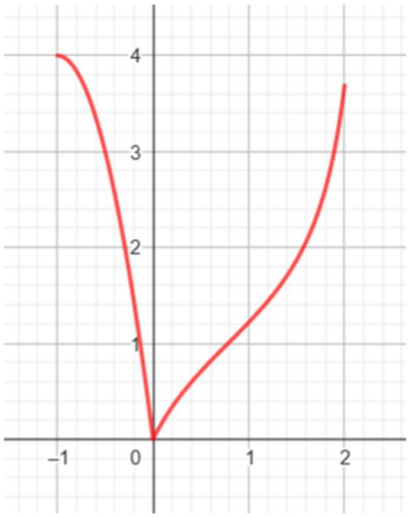
$$f'(x) = \begin{cases} -8x^2 - 8 & -1 \le x < 0 \\ \dfrac{1}{\cos^2\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)} & 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(-8x^2 - 8\right) = -8$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\cos^2\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$$

La funzione non è derivabile in x = 0, dove presenta un punto angoloso.

La curva è formata da un arco di parabola con concavità rivolta verso il basso, e da un ramo di tangentoide, traslato verso sinistra di $3\pi/4$ e verso l'alto di 1. Il grafico è riportato in figura.



4

Calcoliamo le coordinate del punto di contatto N tra la curva e la sua normale:

$$y_N = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

Calcoliamo la derivata della funzione il cui grafico è la curva richiesta:

$$y' = g'(x)\sin^2(x) + 2g(x)\sin x\cos x$$

Nel punto di ascissa $x = \dfrac{\pi}{4}$ si ha:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2g\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\cdot 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3$$

La retta normale, perpendicolare alla tangente, ha pendenza $m = -\dfrac{1}{3}$, pertanto la sua equazione è:

$$y-1=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{3}x+1+\frac{\pi}{12}$$

5

Le ascisse dei punti di intersezione tra le due curve sono date dalle soluzioni dell'equazione:

$$e^x=6-\frac{k}{e^x} \quad \Rightarrow \quad e^{2x}-6e^x+k=0$$

Affinché l'equazione ammetta due soluzioni coincidenti, la funzione a primo membro deve ridursi a un quadrato perfetto, da cui k = 9:

$$e^{2x}-6e^x+9=\left(e^x-3\right)^2=0 \quad \Rightarrow \quad e^x=3 \quad \Rightarrow \quad x=\ln 3$$

Il punto di contatto ha coordinate $x=\ln 3, \quad y=e^{\ln 3}=3$

6

Il testo fornisce 3 condizioni, per cui la funzione polinomiale deve avere 3 parametri liberi, quindi grado 2; sia pertanto

$$f\left(x\right)=ax^2+bx+c$$

La curva deve passare per il punto di coordinate (0;3), da cui c = 3.

La tangente in questo punto ha pendenza 2:

$$f'\left(x\right)=2ax^2+b \text{ e } f'\left(0\right)=b=2$$

Infine:

$$\int_0^3\left(ax^2+2x+3\right)dx=\left|a\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right|_0^3=9a+9+9=9 \quad \Rightarrow \quad a=-1$$

La funzione polinomiale è quindi:

$$y=-x^2+2x+3$$

7

I possibili esiti del lancio di 4 dadi sono $N_p=4^4$.

I casi favorevoli sono $N_f=4!$ (il primo dado può presentare una qualsiasi faccia, il secondo una delle restanti 3, il terzo una delle restanti due, il quarto ha una sola possibilità).

Si ha pertanto:

$$P=\frac{N_f}{N_p}=\frac{4!}{4^4}=\frac{3}{32}$$

Nel caso di numeri uguali, i casi favorevoli sono 4:

$$P = \frac{N_f}{N_p} = \frac{4}{4^4} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

8

La parola è formata da 8 lettere diverse, pertanto il numero di anagrammi è pari al numero di permutazioni di 8 elementi:

$$N = P_8 = 8! = 40\,320$$

Consideriamo il blocco di 4 caratteri ARTE come un elemento unico; il numero di anagrammi è pertanto uguale al numero di permutazioni di 5 elementi (l'elemento unico ARTE, cui si aggiungono i 4 caratteri restanti):

$$N = P_5 = 5! = 120$$

La parola VACANZA è formata da 7 caratteri, di cui 3 ripetuti (la lettera A), pertanto il numero di anagrammi è dato dal numero di permutazioni con ripetizione di 7 elementi, di cui 3 uguali:

$$N = P'_{7,3} = \frac{7!}{3!} = 840$$