Simulazione MIUR Esame di Stato 2019 - matematica

Problema 1

1

$$f_k(x) = \frac{S}{1+e^{-kx}} \qquad S > 0, \quad k > 0$$

Si ha immediatamente:

$$\frac{S}{1+e^{-kx}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

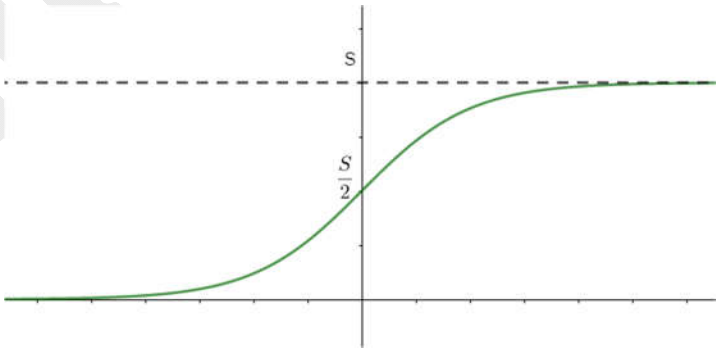
$$e^{-kx} > 0 \quad \Rightarrow \quad 1+e^{-kx} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{S}{1+e^{-kx}} < S \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2

$$f_k\,'(x) = \frac{S\,k\,e^{-kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{S}{1+e^{-kx}} = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{S}{1+e^{-kx}} = S^- \qquad f_k(0) = \frac{S}{2}$$

Il grafico riporta l'andamento; applicando alla curva la traslazione di vettore $\left(0; -\frac{S}{2}\right)$, ovvero:



$$\Gamma_k \begin{cases} x' = x \\ y' = y - \dfrac{S}{2} \end{cases}$$

si ottiene la funzione:

$$h_k(x) = \frac{S}{1+e^{-kx}} - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}\,\frac{1-e^{-kx}}{1+e^{-kx}}$$ che è dispari in quanto

$$h_k(-x) = \frac{S}{2}\,\frac{1-e^{kx}}{1+e^{kx}} = \frac{S}{2}\,\frac{\frac{1}{e^{kx}}-1}{\frac{1}{e^{kx}}+1} = \frac{S}{2}\,\frac{e^{-kx}-1}{e^{-kx}+1} = -\frac{S}{2}\,\frac{1-e^{-kx}}{1+e^{-kx}} = -h_k(x)$$

3

Per la simmetria della funzione, nell'origine si ha il valore massimo della pendenza della curva (*$h'_k(x)$* è una funzione pari, quindi ha un estremo relativo per x = 0).

Si ha: $h_k\,'(x) = f_k\,'(x) \quad \Rightarrow \quad h_k\,'(0) = S\,k$

4

Il tratto obliquo ha equazione:

$$y = S\,k\,x + \frac{S}{2} \quad \text{che si annulla per} \quad x = -\frac{1}{2k}$$

La funzione richiesta assume pertanto la forma

$$g_k(x) = \begin{cases} 0 & x < -\dfrac{1}{2k} \\ Skx + \dfrac{S}{2} & -\dfrac{1}{2k} \le x \le \dfrac{1}{2k} \\ S & x > \dfrac{1}{2k} \end{cases}$$

5, 6

Si può studiare la differenza $D(x) = |g_k(x) - f_k(x)|$

Dall'andamento delle due curve risulta immediato che tale funzione assume valore massimo nei punti $x = \pm\frac{1}{2k}$, per cui: $D(x) = |g_k(x) - f_k(x)| \le S - \frac{S}{1+e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{Se^{-\frac{1}{2}}}{1+e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{S}{\sqrt{e}+1}$

indipendente da *k*.

Possiamo anche calcolare l'area della parte di piano compresa tra le due curve:

$$A = 2\int_0^{+\infty} \left[g_k(x) - f_k(x)\right] dx = 2\int_0^{\frac{1}{2k}} \left[kSx + \frac{S}{2} - \frac{S}{1+e^{-kx}}\right] dx + 2\int_{\frac{1}{2k}}^{+\infty} \left[S - \frac{S}{1+e^{-kx}}\right] dx =$$

$$= 2S\int_0^{\frac{1}{2k}} \left[kx + \frac{1}{2} - \frac{e^{kx}}{1+e^{kx}}\right] dx + 2S\int_{\frac{1}{2k}}^{+\infty} \left[\frac{e^{-kx}}{1+e^{-kx}}\right] dx = 2S\left|\frac{kx^2+x}{2} - \frac{1}{k}\ln\left|1+e^{kx}\right|\right|_0^{\frac{1}{2k}} - 2S\left|\frac{1}{k}\ln\left|1+e^{-kx}\right|\right|_{\frac{1}{2k}}^{+\infty} =$$

$$= \frac{2S}{k}\left(\ln 2 - \frac{1}{8}\right)$$

che diminuisce all'aumentare di *k*, migliorando l'approssimazione tra le due curve.

Problema 2

1

Si deve minimizzare la funzione che esprime la superficie del parallelepipedo (di altezza *h*)

$$S(b) = 2b^2 + 4bh \quad \text{con la condizione} \qquad V = b^2 h = 10\ dm^3$$

Si ha:

$$h = \frac{V}{b^2} \quad \Rightarrow \quad S(b) = 2b^2 + 4\frac{V}{b}$$

Derivando quest'ultima funzione si ottiene:

$$S'(b) = 4b - 4\frac{V}{b^2} > 0 \quad \text{per} \quad b > \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{10}\ dm$$

da cui segue $h = b = \sqrt[3]{10}\ dm$ quindi il blocco deve avere forma cubica.

2

Solo la seconda funzione soddisfa la condizione iniziale $T(0) = T_g$

$$T(t) = (T_a - T_g)(1 - e^{-Kt}) + T_g$$

Perché il ghiaccio non fonda si deve avere $T(t) \le T(2) < 0$, quindi

$$(T_a - T_g)(1 - e^{-Kt}) + T_g < 0 \quad \Rightarrow \quad K < -\frac{1}{t}\ln\frac{T_a}{T_a - T_g}$$

Inserendo i valori del testo per il tempo e le temperature del ghiaccio e dell'ambiente si ottiene:

$$K < -\frac{1}{2}\ln\frac{10\ °C}{28\ °C} = 0,52\ \min^{-1}$$

3

L'incertezza sulla temperatura può stimarsi differenziando, rispetto al parametro variabile *K*, la funzione che determina l'andamento temporale della temperatura.

Utilizzando il valore massimo di K si stima il massimo errore sulla temperatura finale

$$\Delta T = t(T_a - T_g)e^{-Kt}\Delta K \cong 2\min \cdot 28°C \cdot e^{-0,52\min^{-1}\cdot 2\min} \cdot 0,052\min^{-1} \cong 1\ °C$$

L'incertezza è contenuta entro il 10% solo se il ghiaccio non supera la temperatura di circa -10 °C.

4

La relazione tra i volumi dell'acqua e del ghiaccio è

$$V_a(1 + 0,0905) = V_g \quad \Rightarrow \quad V_a = \frac{10\ dm^3}{1,0905} = 9,170\ dm^3$$

L'altezza dell'acqua nel contenitore risulta pertanto $\qquad h = \dfrac{V_a}{\pi r^2} = 1,30\ dm$

QUESTIONARIO

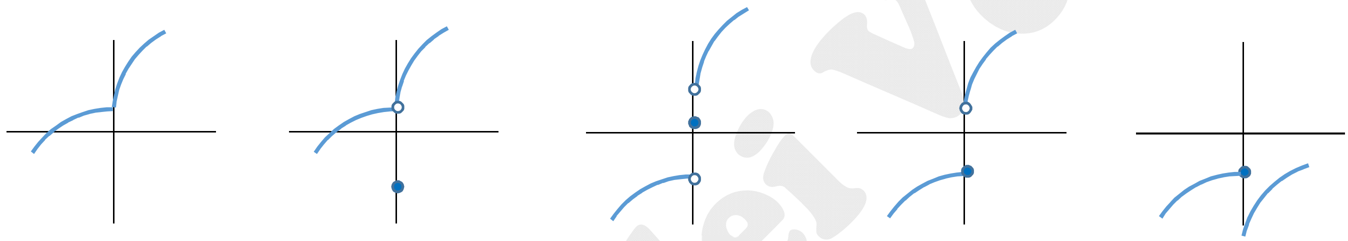
1

Poiché $\lim_{x\to+0^-} f'(x) \neq \lim_{x\to+0^+} f'(x)$ la funzione non è derivabile in 0 (inoltre è anche $\lim_{x\to+0^+} f'(x) = +\infty$).

Se f(x) è continua in 0 (il testo afferma solo “definita in R”) allora la funzione è sempre crescente, nel punto di ascissa nulla ha una semitangente sinistra orizzontale e una semitangente destra verticale (fig. A), il punto di intersezione con l’asse y è arbitrario.

Se la funzione non è continua in *x* = 0, essendo comunque definita in tale punto, restano invariate le condizioni sulle due semitangenti, mentre possono aversi varie situazioni per la discontinuità (se ne riportano alcune, altre si ottengono semplicemente spostando il punto di ascissa 0 da un ramo all’altro).

- fig. B: discontinuità di III specie in 0
- fig. C, D: discontinuità di I specie in 0
- fig. E: asintoto verticale sul ramo destro della funzione



A B C D E

2

$$f'(x) = -\frac{k}{(x-k)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -\frac{1}{k} = \pm\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad k = \mp\sqrt{3}$$

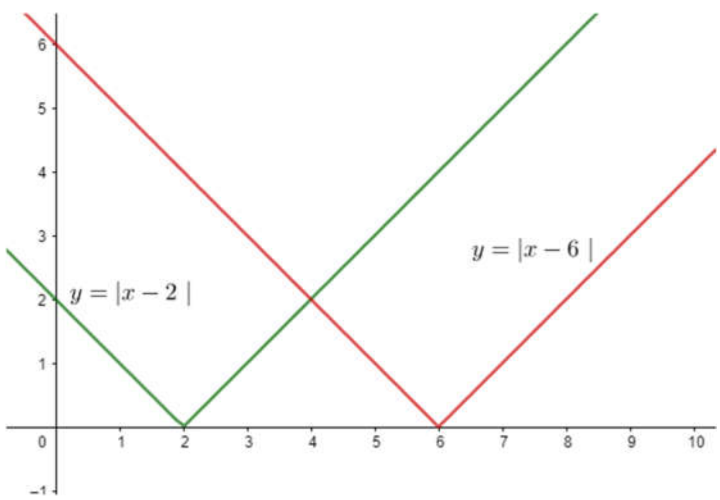
Per $k = \sqrt{3}$ la tangente ha pendenza negativa, per $k = -\sqrt{3}$ ha pendenza positiva.

3

Tracciati i grafici delle funzioni

$y = |x-2|$ e $y = |x-6|$, le due curve si intersecano nel punto di ascissa 4 (v. figura),

per cui la disequazione è risolta per $x > 4$



4

$$\frac{1}{4}\pi R^2 = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{r} = 2$$

5

Le rette AB e OC hanno la spessa pendenza: confrontando i rapporti incrementali tra A e B e tra O e C si ha:

$$\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{c^2}{c} \quad \Rightarrow \quad b+a=c$$

6

Sia $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ la generica polinomiale cubica.

Si ha: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $f''(x) = 6ax + 2b$

Il flesso ha ascissa $x = -\frac{1}{3}\frac{b}{a}$

Le condizioni di passaggio permettono di scrivere il sistema:

$$\begin{cases} 10^3 a + 10^2 b + 10c + d = 0 \\ 10^6 a + 10^4 b + 10^2 c + d = 0 \\ 10^9 a + 10^6 b + 10^3 c + d = 0 \end{cases}$$

Essendo $a \neq 0$, si possono dividere i due membri di ciascuna equazione per *a*, ottenendo (il termine noto è stato portato a secondo membro in vista dei successivi passaggi)

$$\begin{cases} 10^2 \frac{b}{a} + 10\frac{c}{a} + \frac{d}{a} = -10^3 \\ 10^4 \frac{b}{a} + 10^2 \frac{c}{a} + \frac{d}{a} = -10^6 \\ 10^6 \frac{b}{a} + 10^3 \frac{c}{a} + \frac{d}{a} = -10^9 \end{cases}$$

Per cui si ha un sistema di tre equazioni in tre incognite $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}$; per risolverlo utilizziamo il metodo di Cramer, limitandoci a calcolare il rapporto $\frac{b}{a}$. Cominciamo riscrivendo il sistema in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 10^2 & 10 & 1 \\ 10^4 & 10^2 & 1 \\ 10^6 & 10^3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} \\ \frac{d}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10^3 \\ -10^6 \\ -10^9 \end{bmatrix}$$

sottraendo la prima riga alle altre due si ottiene:

$$\frac{b}{a}=\frac{\begin{vmatrix}-10^3 & 10 & 1\\ -10^6 & 10^2 & 1\\ -10^9 & 10^3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10^2 & 10 & 1\\ 10^4 & 10^2 & 1\\ 10^6 & 10^3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}-10^3 & 10 & 1\\ -10^6+10^3 & 10^2-10 & 0\\ -10^9+10^3 & 10^3-10 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}10^2 & 10 & 1\\ 10^4-10^2 & 10^2-10 & 0\\ 10^6-10^2 & 10^3-10 & 0\end{vmatrix}}=\frac{\left(-10^6+10^3\right)\left(10^3-10\right)-\left(10^2-10\right)\left(-10^9+10^3\right)}{\left(10^4-10^2\right)\left(10^3-10\right)-\left(10^2-10\right)\left(10^6-10^2\right)}=$$

$$=\frac{\left(-10^4+10\right)\left(10^2-1\right)-\left(10-1\right)\left(-10^7+10\right)}{\left(10^2-1\right)\left(10\ -1\right)-\left(10\ -1\right)\left(10^4-1\right)}=-999$$

(la semplificazione, ottenuta dividendo numeratore e denominatore per 10^3, è necessaria in alcune calcolatrici per evitare l'overflow).

Il flesso ha pertanto ascissa $x=-\frac{b}{3a}=333$

7

Il raggio della sfera corrisponde alla distanza del punto K dal piano:

$$r=\frac{\left|1+0+1+1\right|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Il punto di tangenza *T* è l'intersezione tra la normale condotta al piano dal punto *K* e il piano stesso; la retta normale ha equazione:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$ da cui, sostituendo nell'equazione del piano, si ottiene

$$1+t-2\left(-2t\right)+1+t+1=0 \quad\Rightarrow\quad t=-\frac{1}{2}$$

da cui: $T=\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$

8

$$P\left(2T,2C\right)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}<50\%$$ (6 casi favorevoli su 16 possibili)