Esame di Stato 2018 sessione suppletiva

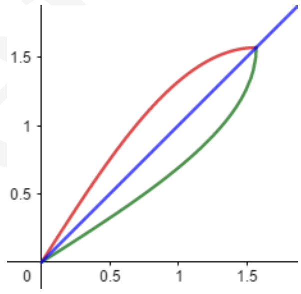
Problema 1

1

La condizione richiesta è soddisfatta quando il primo massimo della curva, di ascissa $x=\frac{\pi}{2}$, si trova sulla bisettrice del primo quadrante, per cui (tutte le misure lineari sono espresse in *dm,* le aree in *dm*^{2}):

$$\frac{\pi}{2}=k\left|sen\frac{\pi}{2}\right|\Rightarrow k=\frac{\pi}{2}$$

Ciascuna foglia presenta una simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo quadrante; l'area totale delle quattro foglie è pertanto:



$$S=4\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}x-x\right)dx=8\left|-\frac{\pi}{2}\cos x-\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\pi^2+4\pi=$$
$$=\pi\left(4-\pi\right)\cong 2{,}70\,dm^2$$

2

La curva deve giacere al di sotto della bisettrice del primo quadrante, pertanto la semitangente destra ad essa condotta nell'origine deve avere pendenza non negativa e non superiore a 1; si ha quindi

$$0\le\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=k\le 1$$

Per k=1 la curva risulta tangente alla bisettrice del primo quadrante e, conseguentemente, alla sua simmetrica rispetto a tale retta.

L'area richiesta è data da:

$$S=12\int_0^{\pi}k\operatorname{sen}x\,dx=-12k\left|\cos x\right|_0^{\pi}=24k\,dm^2$$

3

Lo specchio ha raggio $r=\frac{3\pi-2k}{2}=\frac{3}{2}\pi-k$, per cui la sua area vale

$$S=\pi\left(\frac{3}{2}\pi-k\right)^2\quad\Rightarrow\quad\pi\left(\frac{3}{2}\pi-1\right)^2\le S\le\frac{9\pi^3}{4}$$

Il valore massimo si ottiene in corrispondenza di $k=0$, ovvero per una cornice rettangolare, senza decorazione; il valore minimo è da intendersi nelle condizioni geometriche richieste al punto 2.

4

Per $k=1$ l'area compresa tra specchio e cornice è

$$S_1=\left(3\pi\right)^2-\pi\left(\frac{3}{2}\pi-1\right)^2-24\approx 21{,}53\,dm^2$$

Due mani di vernice corrispondono alla superficie da ricoprire pari a circa 43 *dm²;* una bomboletta da 125 ml (*1/8 l*) consente di ricoprire la superficie di $\frac{1}{8}600\,dm^2 = 75\,dm^2$, per cui è sufficiente una sola bomboletta.

La superficie compresa tra specchio e cornice, per un generico $k \in [0;1]$ è data da

$$S_k(k) = (3\pi)^2 - \pi\left(\frac{3}{2}\pi - k\right)^2 - 24k$$

la cui derivata è:

$$S'_k(k) = \pi(3\pi - 2k) - 24 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k \leq \frac{3}{2}\pi - \frac{12}{\pi} \approx 0,89$$

valore che massimizza la superficie richiesta.

Problema 2

1

Osserviamo preliminarmente che $f_k(x): R^+ \to R$ è una funzione strettamente crescente, quindi invertibile. Esprimendola nella forma

$$f_k(x) = y = k \ln x$$

ed esplicitando la variabile *x* si ottiene

$$x = e^{\frac{y}{k}}$$

La funzione inversa si si ottiene scambiando le due variabili *x* e *y*, pertanto

$$f_k^{-1}(x) = e^{\frac{x}{k}} = g_k(x)$$

Per la proprietà involutoria dell'inversione segue immediatamente, senza necessità di verifica diretta, che

$$g_k^{-1}(x) = \left(f_k^{-1}(x)\right)^{-1} = f_k(x)$$

Le due funzioni assegnate possono esprimersi nella forma:

$$a(x) = x \quad \text{per } x \in R \quad \text{e} \quad b(x) = x \text{ per } x \in R^+$$

pertanto coincidono solo per $x > 0$.

2

Essendo $f_2'(x) = \frac{2}{x}$, l'ascissa del punto di tangenza di s_2 si determina imponendo $f_2'(x) = \frac{2}{x} = 1$, ovvero $x = 2$; il punto di tangenza ha coordinate $S(2; 2\ln 2)$.

La retta s_2 ha pertanto equazione:

$$s_2 : y = x - 2 + 2\ln 2$$

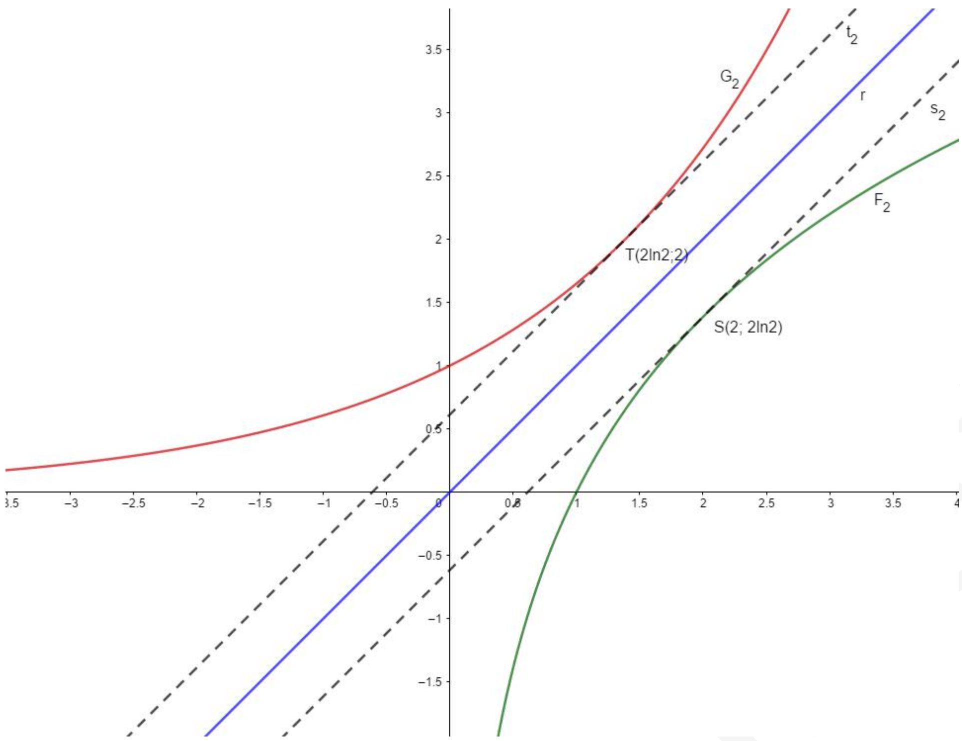
Si può notare che, per la simmetria delle curve $f_2(x)$ e $g_2(x)$, anche le rette s_2 e t_2 sono simmetriche rispetto alla retta *r*, bisettrice del primo e terzo quadrante, per cui l'equazione di t_2 può scriversi immediatamente:

$$t_2 : y = x + 2 - 2\ln 2$$

con punto di tangenza $T(2\ln 2; 2)$; i grafici sono riportati nella figura successiva

La distanza minima tra le due curve corrisponde alla lunghezza del segmento ST:

$$d_{\min} = \sqrt{2(2 - 2\ln 2)^2} = 2\sqrt{2}(1 - \ln 2)$$



3

Gli eventuali punti di intersezione tra le curve $f_k(x)$ e $g_k(x)$, simmetriche rispetto alla retta *r*, appartengono a tale retta, per cui è sufficiente dimostrare che $f_3(x)$ interseca in due punti la retta *r*.

Determiniamo il punto U in cui la curva F_3 ha tangente parallela alla retta *r*.

$$f_3'(x) = \frac{3}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad U(3;3\ln 3)$$

Essendo $y_U = 3\ln 3 \simeq 3{,}3 > 3 = x_U$, il punto di tangenza giace nel semipiano al di sopra di *r*; consideriamo infine la funzione $h(x) = f_3(x) - x = 3\ln x - x$, continua e derivabile per $x > 0$. Si ha inoltre:

$$h'(x) = \frac{3}{x} - 1 > 0 \quad \text{per } x < 3$$

La funzione $h(x)$ è pertanto crescente in $]0;3[$, decrescente in $]3;+\infty[$; applicando il teorema di esistenza e unicità degli zeri all'intervallo $[1;3]$, avendosi $h(1) = -1 < 0$ e $h(3) = 3\ln 3 - 3 > 0$ si conclude che in tale intervallo la funzione si annulla esattamente una volta; in modo analogo si conclude che $h(x)$ si annulla esattamente una volta nell'intervallo $[3;5]$. Da quanto detto inizialmente, segue che anche l'equazione $f_3(x) = g_3(x)$ ha esattamente 2 soluzioni.

I grafici delle funzioni $f_k(x)$ e $g_k(x)$ sono tangenti quando sono entrambe tangenti alla retta *r*; imponendo tale condizione risulta:

$$f_k'(x) = \frac{k}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = k,\ y = k\ln k$$

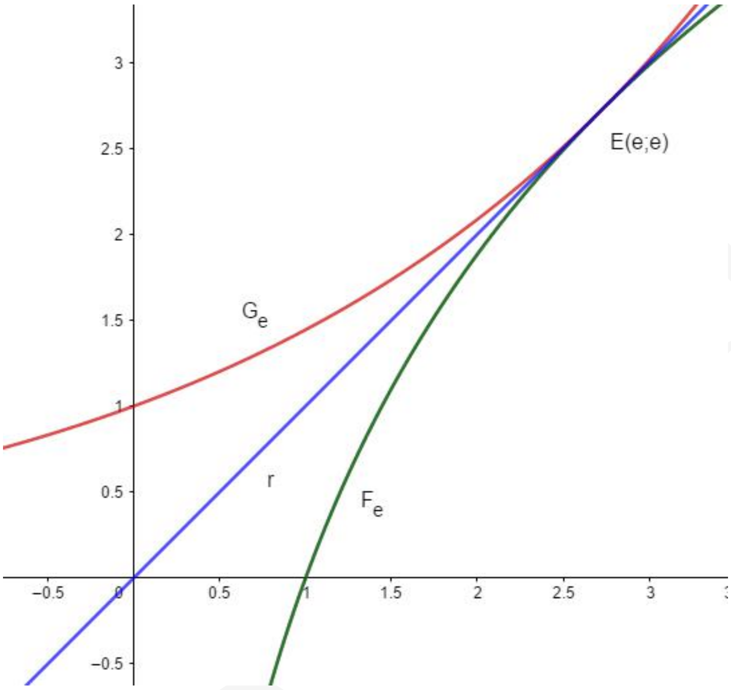
Si ha pertanto l'equazione

$$k = k\ln k \quad \Rightarrow \quad k(1-\ln k)=0 \qquad \text{la cui unica soluzione è } k=e.$$

Le curve F_k e G_k sono disgiunte per $0<k<e$, tangenti per $k=e$, si intersecano in 2 punti per $k>e$-

4

Le curve F_e e G_e sono riportate nella figura successiva; il loro punto di tangenza sia $E(e;e)$



SI ha:

$$A = 2\int_0^e \left(e^{\frac{x}{e}} - x \right) dx = 2\left| e \cdot e^{\frac{x}{e}} - \frac{x^2}{2} \right|_0^e = 2\left(\frac{e^2}{2} - e \right) = e(e-2)$$

Il volume del solido di rotazione attorno all'asse x è:

$$V = \pi \left[\int_0^e e^{\frac{2x}{e}}\, dx - \int_1^e e^2 \ln^2 x\, dx \right]$$

Calcolando preliminarmente le due primitive:

$$\int e^{\frac{2x}{e}}\, dx = \frac{e}{2} e^{\frac{2x}{e}} + c$$

$$\int \ln^2 x\, dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\, dx = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + c = x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + c$$

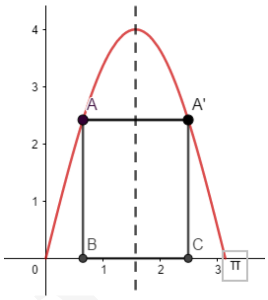
per cui:

$$V = \pi\left[-\frac{e^3}{2} - \frac{e}{2} + 2e^2 \right] = \frac{\pi e}{2}\left(4e - e^2 - 1\right)$$

QUESTIONARIO

1

La situazione è rappresentata nella figura a fianco; preso il punto $A(x;4\operatorname{sen}x)$, con $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, il perimetro del rettangolo inscritto è:



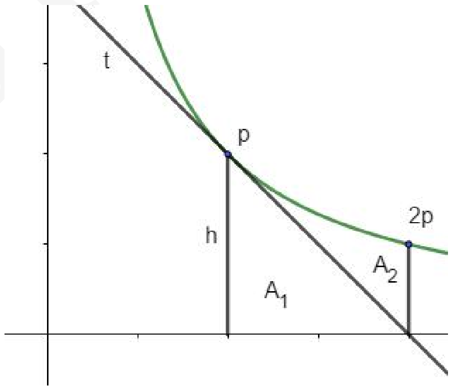
$$P=2\left(4\operatorname{sen}x+2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$$

Derivando, $P'=8\cos x-4>0$ per $\cos x>\dfrac{1}{2}$, ovvero $0<x<\dfrac{\pi}{3}$.

Il rettangolo richiesto si ottiene per $x=\dfrac{\pi}{3}$ e ha perimetro $P=4\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\pi$

2

Essendo $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, la retta tangente in $P\left(p;\dfrac{1}{p}\right)$ alla curva assegnata ha equazione:



$$t: y=-\frac{x}{p^2}+\frac{2}{p}$$

e interseca l'asse x nel punto di coordinate $(2p;0)$.

L'area delle due parti di piano in cui Γ resta divisa da t sono pertanto:

$$A_1=\frac{1}{2}\frac{1}{p}(2p-p)=\frac{1}{2}$$

$$A_2=\int_p^{2p}\frac{1}{x}\,dx-A_1=\ln 2-\frac{1}{2}$$

3

Il raggio della sfera è dato dalla distanza del punto C dal piano:

$$r=\frac{|1+1+2-10|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

La sfera ha pertanto equazione

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=12 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-6=0$$

Per determinare il punto di tangenza, determiniamo l'intersezione tra la normale condotta al piano dal punto C e il piano stesso; la retta normale ha equazione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ da cui, sostituendo nell'equazione del piano, si ottiene

$$1+t-(-1-t)+2+t=10 \quad \Rightarrow \quad t=2$$

Il punto di tangenza ha pertanto coordinate $T=(3;-3;4)$

4

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x\,dx = \left|\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x \cos^{n-2} x\,dx =$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\cancel{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx} = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,dx - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx + \cancel{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx} = \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\,dx$$

Si ha pertanto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x\,dx = \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi$$

5

La probabilità che non esca 3 in *n* lanci del dado è:

$P_3(n)=\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Si ha quindi:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\ln 10^{-4}}{\ln \frac{5}{6}} \approx 50,5$$

Essendo n intero, si ha n = 51

6

Imponendo il passaggio della curva per il punto $T(1;-2)$ si ottiene la condizione:

$$-2=|a+b|-3 \quad \Rightarrow \quad |a+b|=1$$

La derivata della funzione, ove esiste, è esprimibile nella forma:

$$y'(x)=\begin{cases}3ax^2+b & \text{se } ax^2+b>0\\ -3ax^2-b & \text{se } ax^2+b<0\end{cases}$$

nei punti tali che $ax^2+b=0$ la curva potrebbe non essere derivabile (possibili punti angolosi); non è necessario tenere conto di questa possibilità nello svolgimento successivo in quanto nel punto di ascissa 1 tale condizione equivarrebbe a $|a+b|=0$, incompatibile con la condizione di passaggio trovata.

Considerando quindi il punto T di ascissa 1, si ha

$$y'(1)=\begin{cases}3a+b & \text{se } a+b>0\\ -3a-b & \text{se } a+b<0\end{cases}$$

Si hanno pertanto due possibilità

$$\begin{cases}3a+b=7\\ a+b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=3\\ b=-2\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}-3a-b=7\\ a+b=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-3\\ b=2\end{cases}$$

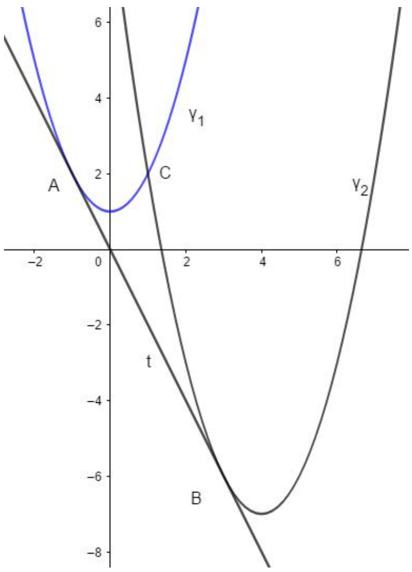
ottenendo per la funzione le due forme:

$$y=x\left|3x^2-2\right|-3 \quad \text{e} \quad y=x\left|-3x^2+2\right|-3$$

che corrispondono in realtà alla medesima equazione.

7

Consideriamo il punto $A\left(a;a^2+1\right)$ su γ_1 e il punto $B\left(b;b^2-8b+3\right)$ su γ_2.



La retta tangente in A ha equazione

$$y-a^2-1=2a(x-a) \quad \Rightarrow \quad y=2ax-a^2+1$$

la tangente in B, con calcoli analoghi, è:

$$y=2(b-4)x-b^2+9$$

Affinché si abbia una tangente comune, le due rette devono coincidere:

$$\begin{cases}2a=2(b-4)\\ -a^2+1=-b^2+9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}$$

La tangente comune ha pertanto equazione $y=-2x$, con punti di contatto $A(-1;2)$ e $B(3;-12)$.

Le due parabole si intersecano nel punto C, soluzione del sistema

$$\begin{cases}y=x^2+1\\ y=x^2-8x+9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$$

L'area della regione di piano compresa tra le due curve e la retta tangente è data da:

$$A=\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)dx+\int_{1}^{3}\left(x^2-8x+9\right)dx+\int_{3}^{-1}\left(-2x\right)dx=$$

$$=\left|\frac{x^3}{3}+x\right|_{-1}^{1}+\left|\frac{x^3}{3}-4x^2+9x\right|_{1}^{3}-\left|x^2\right|_{3}^{-1}=\frac{16}{3}$$

8

Assunto che la funzione $f(x)$ sia una distribuzione di probabilità (non ne è richiesta la verifica), si ha:

per il valore medio μ:

$$\mu=\int_0^{10}x\,f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x^3\right)dx+\int_1^{10}\frac{1}{12}x\,dx=\left|\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{16}\right|_0^1+\left|\frac{x^2}{24}\right|_1^{10}=\frac{203}{48}$$

per la mediana M:

$$\int_0^M f(x)\,dx=\int_M^{10}f(x)\,dx=\frac{1}{2}$$

osservando che $\int_1^{10}\frac{1}{12}\,dx=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$, possiamo dedurre immediatamente che $M>1$, per cui:

$$\int_M^{10}\frac{1}{12}dx=\frac{10-M}{12}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad M=4$$

9

Il luogo geometrico richiesto è il piano perpendicolare al segmento AB e passante per il suo punto medio (piano di simmetria per AB); la sua equazione può trovarsi applicando la proprietà assegnata:

$$\overline{AP}=\overline{BP}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2+\left(z-2\right)^2}=\sqrt{\left(x-3\right)^2+\left(y-2\right)^2+z^2}$$

ottenendo immediatamente:

$$3x-y+2z+4=0$$

10

Si ha:

$$y'=e^{-x}\left(\cos x-\operatorname{sen}x\right)$$

$$y''=-2e^{-x}\cos x$$

per cui:

$$y''+2y'+2y=-2e^{-x}\cos x+2e^{-x}\left(\cos x-\operatorname{sen}x\right)+2e^{-x}\operatorname{sen}x=0$$