Esame di Stato 2018 sessione straordinaria

Problema 1

1

Le tre funzioni proposte sono pari e si annullano negli estremi dell'intervallo di definizione $\left[-a;a\right]$.
La curva che esprime il profilo della candela ha una tangente verticale negli estremi; la funzione che la rappresenta deve pertanto essere non derivabile in tali punti, soddisfacendo la condizione:

$\lim_{x\to a^-} f'(x) = -\infty$ (e simmetricamente $\lim_{x\to -a^+} f'(x) = +\infty$)

l'unica funzione, tra quelle proposte, che soddisfa tale condizione è la n. 1.

Essendo quindi

$$y = \begin{cases} \sqrt{a+x} & se -a \le x < 0 \\ \sqrt{a-x} & se\ 0 \le x \le a \end{cases}$$

si ha:

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{a+x}} & se -a < x < 0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{a-x}} & se\ 0 < x < a \end{cases}$$

La funzione non è derivabile per $x = \pm a$ (punti a tangente verticale) e per $x = 0$ (punto angoloso): si ha infatti

$$\lim_{x\to 0^{\mp}} f'(x) = \pm\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2

La condizione richiesta equivale a

$-30° \le \vartheta < 0$ e, essendo $\tan\vartheta = f'(0) = -\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ si ha:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \le -\frac{1}{2\sqrt{a}} < 0 \quad \Rightarrow \quad a \ge \frac{3}{4}$$

3

$$V = V_{cilindro} + V_{parte\ superiore} = \pi a^2 h + 2\pi\int_0^a x f(x)dx = 32\pi + 2\pi\int_0^2 x\sqrt{2-x}\ dx$$

L'integrale può essere calcolato mediante il cambio di variabile

$$2 - x = t^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 - t^2 \ \text{ e } \ dx = -2tdt$$

$$\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx = -2\int_{\sqrt{2}}^0 \left(2t^2 - t^4\right) dt = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(2t^2 - t^4\right) dt = 2\left|\frac{2}{3}t^3 - \frac{t^5}{5}\right|_0^{\sqrt{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{2}$$

Da cui infine:

$$V = 32\pi\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{15}\right)$$

4

Nella configurazione 1 la scatola ha sezione rettangolare con lato orizzontale di lunghezza $4a$ e lato verticale $2a + a\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)a$; contenendo 3 candele, la sua efficienza E_1 è data da:

$$E_1 = \frac{3\pi a^2}{4\left(2+\sqrt{3}\right)a^2} = \frac{3\pi}{4}\left(2-\sqrt{3}\right) \approx 0,631 = 63,1\%$$

Nella configurazione 2 la scatola ha sezione quadrata di lato $4a$, per cui si ha:

$$E_2 = \frac{4\pi a^2}{16a^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785 = 78,5\%$$

Problema 2

1

Essendo

$f\left(x\right)=\ln\left(ae^{bx}+c\right)$, con $ae^{bx}+c>0$ (condizione di esistenza, verificata $\forall x\in\Re$), si ha

$$f'\left(x\right)=\frac{abe^{bx}}{ae^{bx}+c}\quad\Rightarrow\quad f'\left(x\right)>0\quad\forall a,b,c>0$$

$$f''\left(x\right)=ab\frac{be^{bx}\left(ae^{bx}+c\right)-e^{bx}abe^{bx}}{\left(ae^{bx}+c\right)^{2}}=\frac{ab^{2}c\,e^{bx}}{\left(ae^{bx}+c\right)^{2}}\quad\Rightarrow\quad f''\left(x\right)>0\quad\forall a,b,c>0$$

in entrambe le derivate tutti i fattori infatti sono strettamente positivi.

2

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(ae^{bx}+c\right)=\ln c$$

per cui la funzione ammette un asintoto orizzontale sinistro $y=\ln c$;

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(ae^{bx}+c\right)=+\infty$$ e

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{abe^{bx}}{ae^{bx}+c}=\lim_{x\to+\infty}\frac{abe^{bx}}{e^{bx}\left(a+\frac{c}{e^{bx}}\right)}=b$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(ae^{bx}+c\right)-bx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{bx}\left(a+\frac{c}{e^{bx}}\right)\right)-bx\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(bx+\ln\left(a+\frac{c}{e^{bx}}\right)-bx\right)=\ln a$$

per cui l'asintoto obliquo destro ha equazione $y=bx+\ln a$

Le condizioni richieste impongono:

$$y=\ln c=0\quad\Rightarrow\quad c=1$$

$$y=bx+\ln a=x\quad\Rightarrow\quad a=1\wedge b=1$$

3

Sia $f\left(x\right)=\ln\left(e^{x}+1\right)$

Si ha:

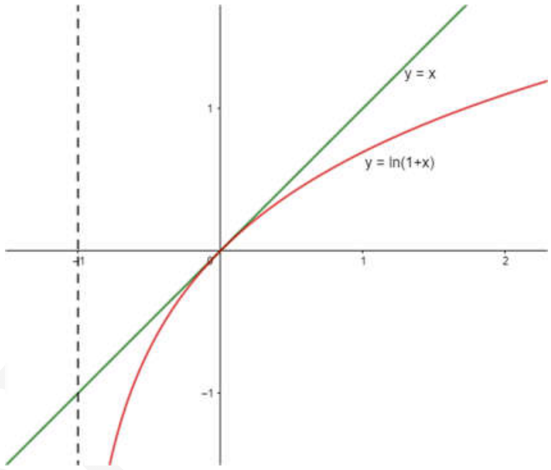
$$f\left(x\right)=\ln\left(e^{x}+1\right)>\ln e^{x}=x\qquad\forall x\in R$$

Per la seconda parte, verifichiamo preliminarmente la disuguaglianza $g(x)=\ln(1+x)<x \quad \forall x\in R^+$

Per $x=0$ si ha $g(0)=0, \quad g'(0)=1$: le due curve sono tangenti nell'origine; per $x>0$ si ha

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}<1 \quad \text{e} \quad g''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}<0$$

pertanto la curva di equazione $y=g(x)$, avendo concavità rivolta verso il basso per ogni x reale giace nel semipiano al di sotto di ogni sua tangente, in particolare della sua tangente nell'origine, per cui si ha:



$$g(x)=\ln(1+x)<x \quad \forall x\in R^+$$

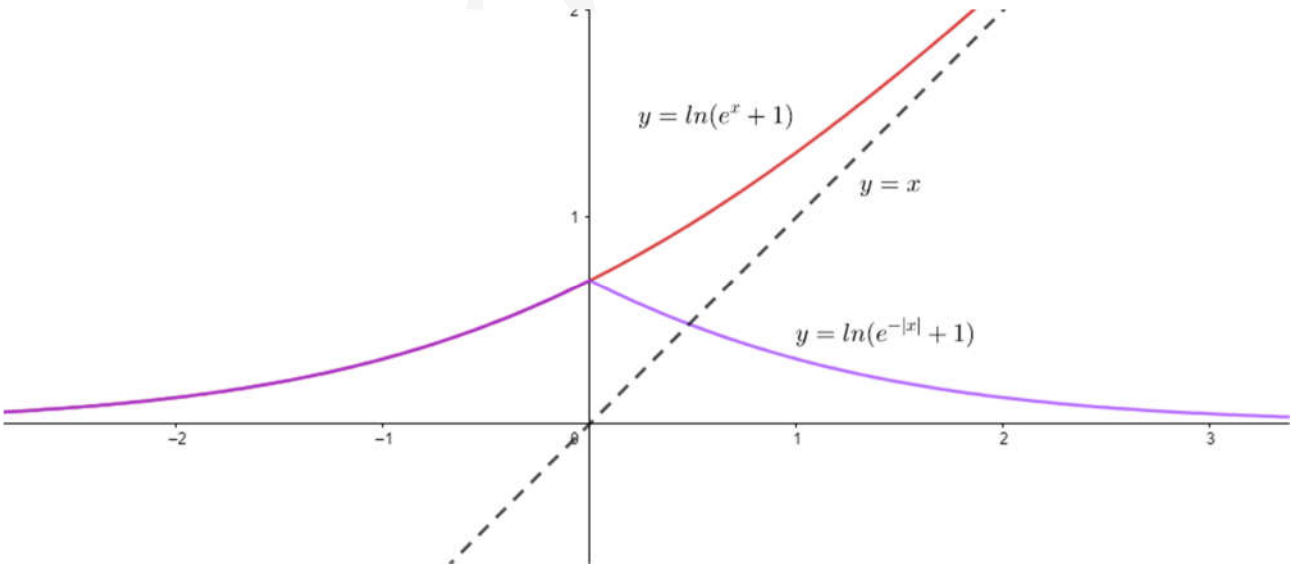
Essendo $e^x>0 \quad \forall x\in R^+$, segue immediatamente:

$$f(x)=\ln(1+e^x)<e^x \quad \forall x\in R.$$

Unendo le due disuguaglianze, si conclude infine $x<f(x)<e^x \quad \forall x\in R$.

4

Le proprietà della funzione $y=f(x)$ sono già state determinate ai punti precedenti; osservando ulteriormente che $f(x)=\ln(e^x+1)>0 \quad \forall x\in R$ se ne può tracciare il grafico

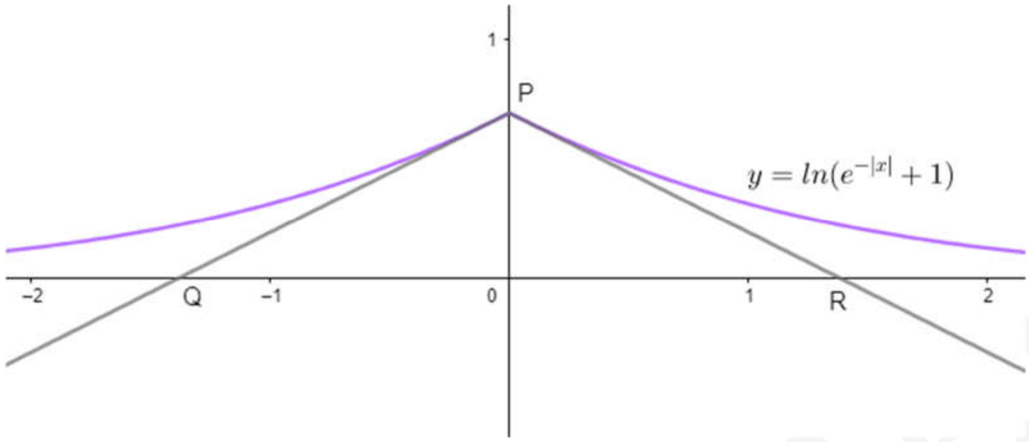


La funzione $h(x)=f(-|x|)$, simmetrica rispetto all'asse *y*, è formata dal ramo della funzione $f(x)$ giacente nel secondo quadrante e dal suo simmetrico rispetto all'asse *y*.

Utilizzando la disuguaglianza ricavata al punto 3 si ottiene:

$$A=2\int_0^{+\infty}\ln(e^{-x}+1)\,dx<2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=2\left|-e^{-x}\right|_0^{+\infty}=2$$

Tracciando le due semitangenti nel punto P di intersezione della curva con l'asse y, l'area A è maggiore dell'area del triangolo PQR in figura



$$y_P = h(0) = \ln 2$$

La semitangente destra ha pendenza data da $\lim_{x\to 0^+} h'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{1}{2}$, da cui l'equazione della retta PR risulta

$$y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

Il punto di intersezione di tale retta con l'asse *x* è pertanto $R(2\ln 2; 0)$.

Si ha infine $A > 2A_{PQR} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln 2\cdot 2\ln 2 = 2\ln^2 2 \approx 0,961$

QUESTIONARIO

1

Essendo:

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 4k + 2\frac{k}{2} = 5k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{5}$$

La probabilità che escano due numeri uguali è data da:

$$\sum_{i=1}^{6} p_i^2 = 4\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{9}{50}$$

2

Il raggio della sfera è dato dalla distanza del punto C dal piano:

$$r = \frac{|2+4+2-12|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

3

Verifichiamo preliminarmente che $f(x)$ è continua in 4.

$$\lim_{x\to 4^-}\left(-\frac{x^2}{4}+2x\right) = \lim_{x\to 4^+}\left(e^{4-x}+3\right) = f(4) = 4$$

Le semitangenti sinistra e destra nel punto di ascissa 4 hanno rispettivamente pendenza

$$m_1 = \lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^-}\left(-\frac{x}{2}+2\right) = 0 \qquad \text{e}$$

$$m_2 = \lim_{x\to 4^+} f'(x) = \lim_{x\to 4^+}\left(-e^{4-x}\right) = -1$$

L'angolo tra le due rette è pertanto $\frac{3}{4}\pi$

4

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\operatorname{sen}(x+h) - x\operatorname{sen}x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x\left[\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}x\right] + h\operatorname{sen}(x+h)}{h} =$$

$$= x\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}x}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{h\operatorname{sen}(x+h)}{h} = x\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h} + \operatorname{sen}x = x\cos x + \operatorname{sen}x$$

5

La funzione $f\left(x\right)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$, $f\left(0\right)=1$; l'equazione $f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}=2$ non ha soluzioni, per cui la curva giace al di sotto della retta di equazione $y=2$. L'area richiesta è data da:

$$S=\int_0^5\left[2-f\left(x\right)\right]dx=\int_0^5\left(2-\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx=\left|2x-\ln\left(x^2+x+1\right)\right|_0^5=10-\ln 31$$

6

$$f\left(x\right)=xe^{-x}$$

$$f'\left(x\right)=\left(1-x\right)e^{-x}$$

$$f''\left(x\right)=\left(x-2\right)e^{-x};\quad f''\left(x\right)=0\quad \text{per}\quad x=2$$

La curva presenta un flesso in $\left(2;2e^{-2}\right)$; la tangente inflessionale ha equazione

$$y-f\left(2\right)=f'\left(2\right)\left(x-2\right)\quad\Rightarrow\quad y=-\frac{x}{e^2}+\frac{4}{e^2}$$

7

Verifichiamo che $f\left(x\right)$ è una densità di probabilità (anche se il testo non lo richiede esplicitamente)

$f(x)\geq 0\quad \forall x\in\left[0;2\right]$ e

$$\int_0^2 f\left(x\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=1$$

Il valore medio m è dato dall'integrale:

$$m=\int_0^2 xf\left(x\right)dx=\int_0^{1/2}\frac{1}{3}x\,dx+\int_{1/2}^{3/2}\frac{7}{12}x\,dx+\int_{3/2}^{2}\frac{1}{2}x\,dx=\left|\frac{x^2}{6}\right|_0^{1/2}+\left|\frac{7x^2}{24}\right|_{1/2}^{3/2}+\left|\frac{x^2}{4}\right|_{3/2}^{2}=\frac{17}{16}$$

La mediana M della distribuzione soddisfa la condizione:

$\displaystyle\int_0^M f\left(x\right)dx=\int_M^2 f\left(x\right)dx=\frac{1}{2}$ che implica

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\left(M-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad M=\frac{15}{14}$$

8

La retta richiesta ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1-t \end{cases}$$

I punti su di essa che distano 6 dal piano si determinano dall'equazione:

$$\frac{\left|2(1+2t)-(1-t)-(1-t)\right|}{\sqrt{6}} = 6 \quad \Rightarrow \quad |6t| = 6\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{6}$$

Si hanno pertanto i punti: $P_1\left(1+2\sqrt{6};1-\sqrt{6};1-\sqrt{6}\right)$ e $P_2\left(1-2\sqrt{6};1+\sqrt{6};1+\sqrt{6}\right)$

$P_1\left(1+2\sqrt{6};1-\sqrt{6};1-\sqrt{6}\right)$

9

$$f(x) = \frac{ax+1}{x} = a + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(\pm 1) = -1$$

Quindi le tangenti nei punti di ascissa $x = \pm 1$ sono parallele alla bisettrice del II e IV quadrante.

La tangente alla generica iperbole nel punto di ascissa 1 ha equazione:

$$y - a - 1 = -(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -x + a + 2$$

che, interseca gli assi cartesiani nei punti $(0;a+2)$ e $(a+2;0)$, formano un triangolo rettangolo isoscele di lato $|a+2|$; la condizione richiesta implica:

$$\frac{1}{2}|a+2|^2 > 3 \quad \Rightarrow \quad a < -\sqrt{6} - 2 \vee a > \sqrt{6} - 2$$

Il testo non precisa $a > 0$; in tal caso non esisterebbe valore minimo di a; imponendo la condizione aggiuntiva $a > 0$ il valore minimo è invece $a > \sqrt{6} - 2$

10

Utilizzando la definizione:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a(x+h)} - e^{ax}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{ax}\left[e^{ah} - 1\right]}{h} = \lim_{h \to 0} a \frac{e^{ax}\left[e^{ah} - 1\right]}{ah} = ae^{ax}$$