Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

I043 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

(Testo valevole anche per la corrispondenti sperimentazioni quadriennali)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Un produttore di candeline tea light vuole produrre un nuovo tipo di candela colorata che abbia una parte inferiore di forma cilindrica ed una parte superiore avente la forma riportata in figura 1, che si connetta perfettamente a quella inferiore, come mostrato in figura 2:

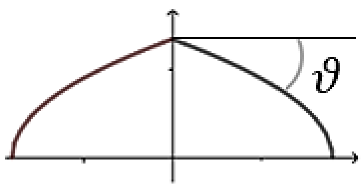

Figura 1

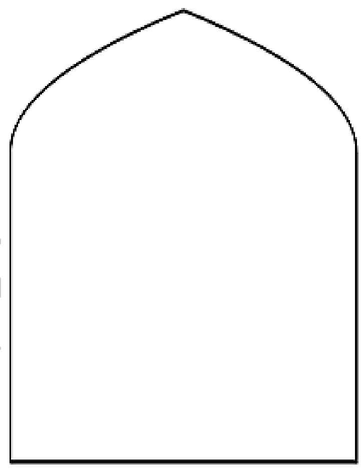

Figura 2

1) Stabilisci, motivando adeguatamente la risposta, quale delle seguenti funzioni può rappresentare adeguatamente il profilo della parte superiore della candela:

1. $y = \begin{cases} \sqrt{a-x} & se\ 0 \leq x \leq a \\ \sqrt{a+x} & se - a \leq x < 0 \end{cases} \quad con\, a \in \mathbb{R},\ a > 0$

2. $y = a - x^2 \quad in \left[-\sqrt{a}; \sqrt{a}\right] \quad con\ \ a \in \mathbb{R},\ a > 0$

3. $y = -\sqrt{|x|} + a \quad in\ [-a^2;\ a^2] \quad con\ \ a \in \mathbb{R},\ a > 0$

Utilizzando l'espressione analitica trovata, studia eventuali punti di singolarità del profilo della parte superiore della candela.

2) Per consentire l'inserimento dello stoppino al vertice della candela, è necessario che l'angolo ϑ in figura 1 non sia maggiore di 30°. Determina di conseguenza i possibili valori del parametro a.

3) Attribuendo all'altezza e al raggio della parte cilindrica i valori rispettivamente di 8 e 2, in un'opportuna unità di misura, determina il volume totale della candela. Da questo dato dipenderanno il peso e il costo di produzione della candela stessa.

Il produttore deve inscatolare le candele in confezioni da 3 e da 4 candele, posizionando le candele in verticale, con le basi circolari disposte in modo da occupare il minor spazio possibile. Si prevedono due possibili configurazioni per posizionare le basi circolari delle candele all'interno delle scatole, rappresentate in figura 3:

Configurazione 1 — Configurazione 2

Figura 3

4) Fornisci una valutazione numerica dell'efficienza dei due confezionamenti, calcolando il rapporto tra area occupata dalle basi circolari delle candele inserite nella scatola e area disponibile in ciascuna delle due configurazioni. Tale rapporto deve essere espresso in percentuale. Ai fini del calcolo, considera che le celle poligonali evidenziate in grigio sono rispettivamente un triangolo equilatero e un quadrato.

PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f : \Re \to \Re$, così definita:

$$f(x) = \ln(a \cdot e^{bx} + c)$$

al variare di a,b,c parametri reali positivi.

1) Verifica che, comunque si scelgano i parametri, si ha:

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in \Re, \ f''(x) > 0 \ \forall x \in \Re.$$

2) Verifica inoltre che, comunque si scelgano i parametri, la funzione f ha un asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$, e un asintoto obliquo, per $x \to +\infty$; determina a,b,c in modo che l'asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$, sia la retta di equazione $y = 0$ e l'asintoto obliquo, per $x \to +\infty$, sia la retta di equazione $y = x$.

3) Dimostra che ponendo $a = b = c = 1$ si ha:

$$x < f(x) < e^x \ \forall x \in \Re.$$

4) Verifica inoltre che ponendo $a = b = c = 1$ e detta A l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $h(x) = f(-|x|)$ e l'asse x del riferimento cartesiano, si ha

$$A < 2$$

Inoltre, a partire dalle caratteristiche del grafico della funzione $h(x)$, determina un numero reale S, quanto più grande possibile, tale che

$$A > S$$

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

QUESTIONARIO

1. Si dispone di due dadi uguali non bilanciati. Lanciando ciascuno dei due dadi, le probabilità di uscita dei numeri 1, 2, 3 e 4 sono pari a k, mentre le probabilità di uscita dei numeri 5 e 6 sono pari a $^{k}/_{2}$. Determinare il valore di k e stabilire qual è la probabilità che, lanciando i due dadi contemporaneamente, escano due numeri uguali tra loro.

2. Determinare il raggio della sfera di centro $C(2,2,2)$ tangente al piano di equazione:
$$x+2y+z=12.$$

3. Considerando la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come:
$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{4}+2x, & per\ x<4 \\ e^{4-x}+3, & per\ x\geq 4 \end{cases}$$
determinare l'angolo formato dalle tangenti nel punto angoloso del grafico della funzione.

4. Calcolare la derivata della funzione $f(x)=x\cdot sen(x)$, adoperando la definizione di derivata.

5. Determinare l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione:
$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1},$$
le rette $y=2,\ x=5$ e l'asse y.

6. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione:
$$f(x)=x\cdot e^{-x}$$
nel suo punto di flesso.

7. La variabile casuale x ha densità di probabilità data dalla funzione:
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3} & per\ x\in[0,{}^{1}/_{2}] \\ \dfrac{7}{12} & per\ x\in[{}^{1}/_{2},{}^{3}/_{2}] \\ \dfrac{1}{2} & per\ x\in[{}^{3}/_{2},2] \end{cases};$$
determinare la media e la mediana della variabile casuale x.

8. Determinare le coordinate dei punti nello spazio che giacciono sulla retta perpendicolare nel punto $[1, 1, 1]$ al piano di equazione $2x - y - z = 0$, a distanza 6 da tale piano.

9. Considerando la funzione:

$$f(x) = \frac{ax + 1}{x}$$

definita in $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$, mostrare che le tangenti al suo grafico nei punti di ascissa -1 e 1 sono parallele alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, indipendentemente dal valore del parametro a. Individuare inoltre il valore minimo del parametro a per cui la tangente al grafico nel punto di ascissa 1 forma con gli assi cartesiani un triangolo di area maggiore di 3.

10. Dimostrare che la derivata della funzione:

$$f(x) = e^{ax}$$

è la funzione

$$f'(x) = a \cdot e^{ax}$$

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.