Esame di Stato 2018

Problema 1

1

$$y = f(x) = 1 - x \quad x \in [0;1]$$

L'equazione della curva Λ che descrive il profilo sull'intera mattonella si ottiene simmetrizzando tale funzione rispetto agli assi e all'origine (ovviamente non è l'equazione di una funzione):

$|x| + |y| = 1$ (l'equazione deve essere invariante per trasformazioni $x \to -x,\ \ y \to -y$

2

Una funzione di 2° grado che rispetti le condizioni richieste ha come grafico un arco di parabola con vertice in (0;1), ovvero

$$f(x) = ax^2 + 1 \quad x \in [0;1]$$

imponendo il passaggio per (1;0) si ha infine

$$f(x) = 1 - x^2 \quad x \in [0;1]$$

L'area della parte da colorare in grigio risulta:

$$S = \int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx = \left| x - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{2}{3} \cong 67\%$$

per cui tale funzione non può soddisfare le condizioni richieste.

Procedendo con una funzione polinomiale di 3° grado:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad x \in [0;1]$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad x \in [0;1]$$

da cui, imponendo le condizioni di passaggio e di derivabilità richieste:

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ b = -a - 1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) = ax^3 - (a+1)x^2 + 1$$

aggiungendo infine la condizione sull'area si ottiene:

$$S = \int_0^1 \left(ax^3 - (a+1)x^2 + 1\right) dx = \left| a\frac{x^4}{4} - (a+1)\frac{x^3}{3} + x \right|_0^1 = \frac{8-a}{12} = \frac{55}{100}$$

da cui:

$$a=\frac{7}{5} \quad \text{e} \quad f(x)=\frac{7}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2+1 \qquad f'(x)=\frac{21}{5}x^2-\frac{24}{5}x$$

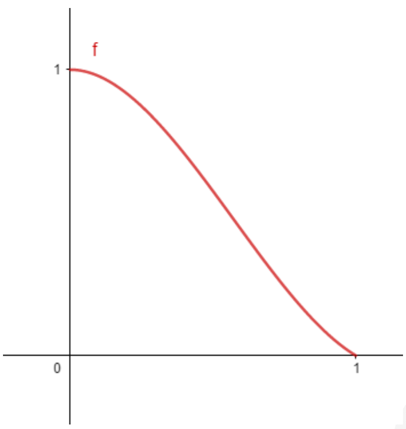
Essendo: $f'(x)>0 \quad per \quad x<0 \quad \vee \quad x>\frac{8}{7}$

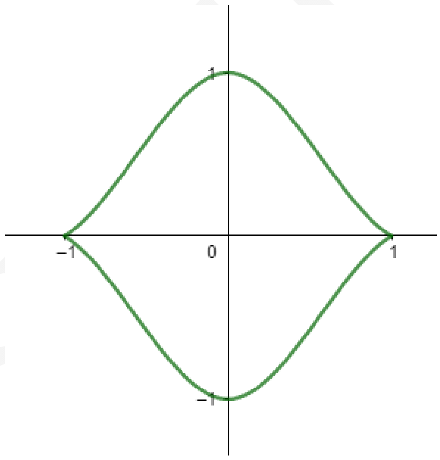
la funzione è decrescente nell'intervallo [0; 1] , nel quale soddisfa pertanto la condizione $0<f(x)<1$ per $0<x<1$

Si ha poi:

$$f''(x)=\frac{42}{5}x-\frac{24}{5} \quad \Rightarrow \quad f''(x)>0 \quad \text{per} \quad x>\frac{4}{7}$$

$x=\frac{4}{7}$ è un punto di flesso per la funzione, il cui grafico è riportato nella figura a sinistra:





che, con le simmetrie richieste, fornisce il disegno per l'intera mattonella riportato a destra; l'equazione di tale curva si ottiene come al punto 1:

$$|y|=\frac{7}{5}|x|^3-\frac{12}{5}x^2+1$$

3

$$a_n(0)=1, \quad a_n(1)=0, \quad a_n'(x)=-n\,x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad a_n'(x)<0 \quad per \quad x\in]0;1[$$

$$b_n(0)=1, \quad b_n(1)=0, \quad b_n'(x)=-n(1-x)^{n-1} \quad \Rightarrow \quad b_n'(x)<0 \quad per \quad x\in]0;1[$$

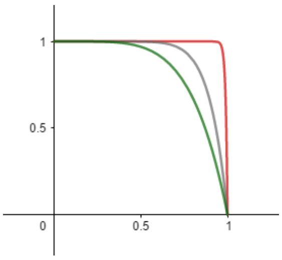
l'ultima conclusione è ovviamente valida per $n\neq 1$; le funzioni $a_n(x)$ e $b_n(x)$ sono decrescenti in]0; 1[, per cui sono soddisfatte le tre condizioni imposte dal testo.

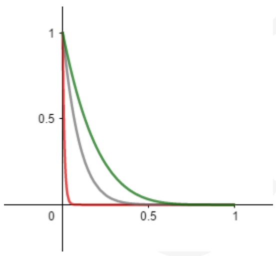
$$A_n = \int_0^1 \left(1 - x^n\right) dx = \left| x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} A_n = 1$$

$$B_n = \int_0^1 \left(1 - x\right)^n dx = \left| -\frac{\left(1-x\right)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} B_n = 0$$

Per $n \to \infty$, $a_n\left(x\right)$ tende alla funzione costante per $x \in \left[0;1\right[$, che approssima il lato orizzontale superiore $\left(a_n\left(x\right) \approx 1\right)$ e il lato destro del quadrato di lato unitario: la mattonella tende ad essere completamente colorata; $b_n\left(x\right)$ tende invece alla funzione che approssima il lato orizzontale inferiore e il lato sinistro dello stesso quadrato $\left(b_n\left(x\right) \approx 0\right)$, per cui la mattonella tende ad essere completamente bianca.

A titolo di esempio, si riportano rispettivamente nelle figure a sinistra e a destra, alcune funzioni $a_n\left(x\right)$ e $b_n\left(x\right)$ con n = 5, 10, 100





4

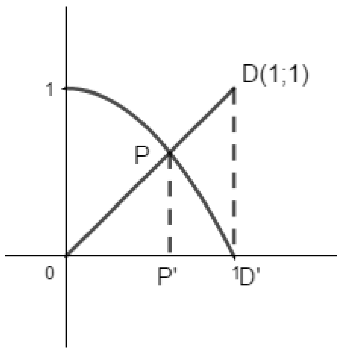
Consideriamo le funzioni

$$a_2\left(x\right) = 1 - x^2 \quad \text{e} \quad b_2\left(x\right) = \left(1 - x\right)^2$$

che intersecano la diagonale del primo quadrante rispettivamente nei punti

$$P = \begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \quad \text{e}$$

$$Q = \begin{cases} y = \left(1-x\right)^2 \\ y = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$



La probabilità che la goccia cada sulla parte non colorata è data dal rapporto tra la lunghezza del segmento PD e la lunghezza della diagonale, rapporto uguale, per il Teorema di Talete, al rapporto tra le rispettive proiezioni sull'asse x (analogamente per il punto Q, non riportato in figura).

Il numero di mattonelle danneggiate può pertanto essere stimato dalla seguente relazione:

$$N_D \approx 5000\cdot 0,20\cdot\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \quad +5000\cdot 0,20\cdot\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=$$

$$=5000\cdot 0,20\cdot\left(\frac{2-\sqrt{5}+1}{2}+\frac{2-3+\sqrt{5}}{2}\right)=1000$$

Problema 2

1

$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9 \quad \Rightarrow \quad f_k'(x) = -3x^2 + k$$

$$f_k'(0) = k, \quad f_k'(1) = k - 3$$

Da cui le due retta tangenti hanno rispettivamente equazioni:

$$r_k : y = kx + 9 \qquad\qquad s_k : y - (8 + k) = (k - 3)(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = (k - 3)x + 11$$

che si intersecano in

$$M = \begin{cases} y = kx + 9 \\ y = (k - 3)x + 11 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{2}{3}k + 9 \end{cases}$$ la cui ascissa non dipende dal parametro *k*.

2

$$y_M = \frac{2}{3}k + 9 < 10 \quad \Rightarrow \quad k < \frac{3}{2}$$

quindi *k = 1* è il massimo intero che soddisfa la condizione richiesta.

Consideriamo la funzione (cubica) $f_1(x) = -x^3 + x + 9$

$$\lim_{x \to \mp\infty} \left(-x^3 + x + 9 \right) = \pm\infty$$

$$f_1'(x) = -3x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f_1'(x) > 0 \quad per \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Presenta minimo e massimo relativi rispettivamente in $A\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 9 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ e $B\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 9 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

$$f_1''(x) = -6x \quad \Rightarrow \quad f_1''(x) > 0 \quad per \quad x < 0$$

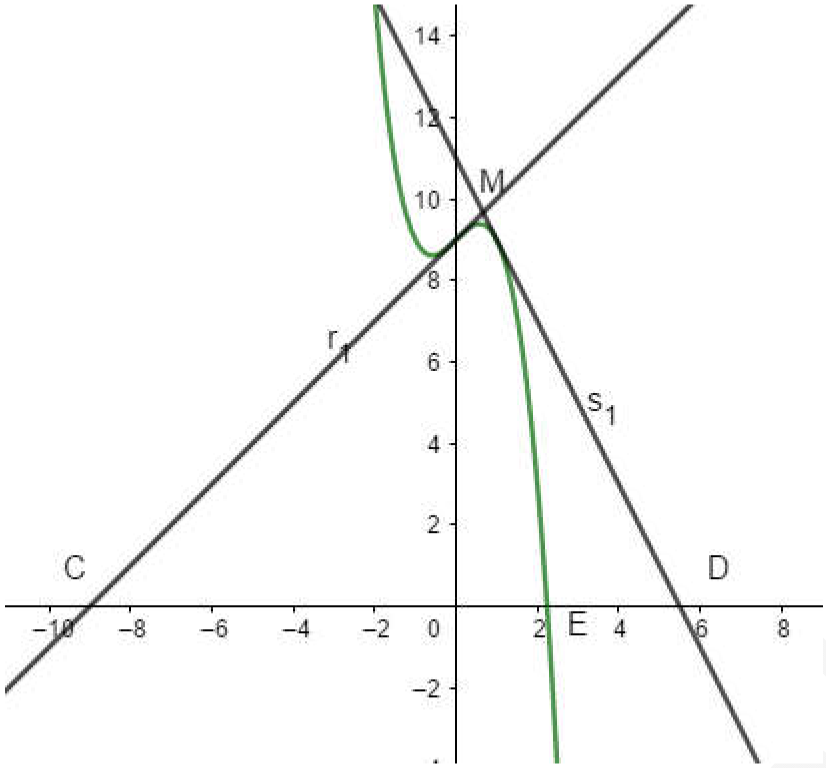
$F(0;9)$ è un punto di flesso con tangente inflessionale di pendenza $f_1'(0) = 1$; il grafico risultante, comprensivo delle rette tangenti richieste al punto 3, è riportato nella pagina successiva.

3

Le rette richieste hanno equazione:

$$r_1 : y = x + 9 \qquad\qquad s_1 : y = -2x + 11$$

r_1 coincide con la tangente inflessionale; le due rette si intersecano in $M\left(\frac{2}{3}; \frac{29}{3}\right)$



e intersecano l'asse x rispettivamente nei punti di coordinate $C(-9;0)$ e $D\left(\frac{11}{2};0\right)$, per cui il triangolo T ha area $S_T = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}+9\right)\cdot\frac{29}{3} = \frac{841}{12}$

Con metodi ordinari non è possibile determinare esattamente l'intersezione E della curva Γ_1 con l'asse x (a meno di utilizzare la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado), per cui tale punto deve essere ricavato con un metodo numerico[1]; osservando che nell'intervallo [2;3] *f(x)* è continua, assume valori di segno opposto agli estremi, *f'(x) < 0* e *f"(x)* < 0, si può applicare il metodo delle tangenti per ottenere rapidamente una soluzione approssimata; si ha:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{-x_n^3 + x_n + 9}{-3x_n^2 + 1} = \frac{2x_n^3 + 9}{3x_n^2 - 1}$$

ottenendo la successione di soluzioni approssimate: 3; 2,42; 2,25; 2,24 ulteriori ricorsioni determinano correzioni oltre la seconda cifra decimale.

L'area della parte di piano interna al triangolo e giacente al di sopra del grafico Γ_1 è pertanto data da:

$$S = \int_0^{\frac{2}{3}} \left[x+9-\left(-x^3+x+9\right)\right]dx + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{11}{2}} (-2x+11)\,dx - \int_{\frac{2}{3}}^{2,24} \left(-x^3+x+9\right)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 dx + \left|-x^2+11x\right|_{\frac{2}{3}}^{\frac{11}{2}} - \left|-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+9x\right|_{\frac{2}{3}}^{2,24} \cong 13,21$$

[1] Naturalmente la soluzione può essere trovata immediatamente utilizzando la calcolatrice grafica, ammessa dal Miur all'Esame di Stato

La probabilità richiesta è infine data da:

$$P = \frac{S}{S_T} = \frac{13,21}{\frac{841}{12}} \cong 0,19$$

4

Indicata con $y = P_n(x)$ la generica funzione polinomiale di grado *n*, si ha $y' = P_n'(x) = Q_{n-1}(x)$, ovvero la derivata è una funzione polinomiale di grado *n-1*.

L'equazione della normale alla curva in un punto di ascissa x_0 ha equazione:

$$y - P_n(x_0) = -\frac{1}{P_n'(x_0)}(x - x_0) = -\frac{1}{Q_{n-1}(x_0)}(x - x_0)$$

imponendo il passaggio per l'origine, si ha:

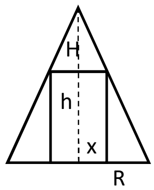
$$-P_n(x_0) = \frac{1}{Q_{n-1}(x_0)} x_0 \quad \Rightarrow \quad Q_{n-1}(x_0) \cdot P_n(x_0) + x_0 = 0$$

ottenendo un'equazione polinomiale di grado *2n-1* nella variabile x_0, che ammette al massimo *2n-1* soluzioni.

QUESTIONARIO

1

Dato un generico cono di raggio di base *R* e altezza *H*, il suo volume è $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$;



indichiamo con *x* e *h* raggio e altezza del cilindro in esso inscritto, e determiniamone il volume massimo (nella figura a destra è riportata la sezione del solido).

Per la similitudine si ha:

$$\frac{x}{R} = \frac{H-h}{H} \quad \Rightarrow \quad h = H\left(1-\frac{x}{R}\right)$$

il cilindro ha volume

$$V_{cil} = \pi x^2 h = \pi x^2 H\left(1-\frac{x}{R}\right) = \pi H\left(x^2 - \frac{x^3}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad V'_{cil} = \pi H x\left(2-\frac{3x}{R}\right)$$

che risulta massimo per $x = \frac{2}{3}R$, da cui $V_{cil,MAX} = \pi H\left(x^2 - \frac{x^3}{R}\right) = \frac{4}{27}\pi R^2 H = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right) < \frac{1}{2}V_{cono}$

2

Si ha:

$$p(4) = P; \quad p(3) = 2P; \quad p(2) = 4P; \quad p(1) = 8P$$

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 15P = 1 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{15}$$

da cui:

$$p(4) = \frac{1}{15}; \quad p(3) = \frac{2}{15}; \quad p(2) = \frac{4}{15}; \quad p(1) = \frac{8}{15}$$

La probabilità che escano due numeri uguali è data da:

$$p_{uguali} = \frac{8}{15}\cdot\frac{8}{15} + \frac{4}{15}\cdot\frac{4}{15} + \frac{2}{15}\cdot\frac{2}{15} + \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{15} = \frac{85}{225} = \frac{17}{45}$$

3

Cerchiamo preventivamente i punti in cui la curva ha tangente di pendenza *m=-4.*

$$y' = 3x^2 - 8x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3} \vee x = 2$$

In tali punti retta e curva devono avere la stessa ordinata, pertanto:

per $x=\frac{2}{3}$: $\frac{8}{27}-\frac{16}{9}+5=-\frac{8}{3}+k \quad \Rightarrow \quad k=\frac{167}{27}$

per $x=2$: $8-16+5=-8+k \quad \Rightarrow \quad k=5$

4

Essendo: $\frac{1}{e}\le e^{\operatorname{sen} x}\le e$ e $-1\le \cos x\le 1$ si ha:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-e^{\operatorname{sen} x}}{5+e^{-x}-\cos x}=+\infty$ infatti, per *x>0* $0<e^{-x}<1$, quindi $\frac{3x-e^{\operatorname{sen} x}}{5+e^{-x}-\cos x}\ge\frac{3x-e}{5+1+1}$

che diverge a+∞

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-e^{\operatorname{sen} x}}{5+e^{-x}-\cos x}=0$ infatti: $\frac{3x-e}{5+e^{-x}+1}\le\frac{3x-e^{\operatorname{sen} x}}{5+e^{-x}-\cos x}\le\frac{3x-\frac{1}{e}}{5+e^{-x}+1}$

Primo e terzo membro convergono a 0 per cui, per il teorema del confronto, converge a zero anche il termine centrale.

5

Siano *x* e *y* rispettivamente il lato orizzontale e verticale del rettangolo.

Si ha:

$$2y+x+\frac{\pi}{2}x=2 \quad \Rightarrow \quad y=1-\frac{\pi+2}{4}x$$

$$S=xy+\frac{\pi}{8}x^2=x-\frac{\pi+4}{8}x^2 \quad \Rightarrow \quad S'=1-\frac{\pi+4}{4}x$$

L'area massima si ottiene per $x=\frac{4}{\pi+4},\quad y=\frac{2}{\pi+4}$

6

La normale al piano nel punto T ha equazione:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

che, messa a sistema con la retta *r*, consente di determinare il centro C della sfera:

$$\begin{cases} -4+3u=t \\ -u=t \\ 1-2u=t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t=-1 \\ u=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

la cui distanza dal piano, pari al raggio della sfera, risulta:

$$R=\frac{\left|-3+1+2+14\right|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

La sfera ha pertanto equazione:

$$\left(x+1\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z+1\right)^2=14 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-11=0$$

7

$$3\int_a^{a+1}\left(x^2+1\right)dx=3\left|\frac{x^3}{3}+x\right|_a^{a+1}=3\left|\frac{\left(a+1\right)^3}{3}+a+1-\frac{a^3}{3}-a\right|_a^{a+1}=3a^2+3a+4=10$$

da cui segue $a=1 \vee a=-2$

8

I risultati possibili sono 10-0, 10-1 e 10-2 (simmetricamente per i due giocatori); indichiamo con A e B i due giocatori e supponiamo che vinca A; dal momento che la probabilità di vittoria di ciascuno dei due è $p_A=p_B=\frac{1}{2}$, il primo risultato può ottenersi con probabilità

$$p\left(10-0\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{2^{10}}$$

Perché la partita termini 10-1, il giocatore A deve vincere l'undicesima partita e perdere una qualunque delle prime 10, ovvero sono possibili sequenze del tipo ABAAAAAAAA**A**, la cui probabilità è:

$$p\left(10-1\right)=\binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}=\frac{10}{2^{11}}$$

Analogamente, perché la partita termini 10-2, A deve vincere la dodicesima partita e perderne 2 qualunque tra le prime 11, pertanto si ha:

$$p\left(10-2\right)=\binom{11}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{55}{2^{12}}$$

La probabilità totale, tenendo conto anche della possibilità di vittoria di B con le stesse modalità, risulta pertanto:

$$P=2\cdot\left(\frac{1}{2^{10}}+\frac{10}{2^{11}}+\frac{55}{2^{12}}\right)=\frac{79}{2^{11}}\cong 0,039$$

9

È immediato verificare, per sostituzione diretta, che i 3 punti appartengono al piano α.

I lati del triangolo misurano:

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2} = 2\sqrt{2}$$

Analogamente

$$\overline{AC} = \overline{BC} = 2\sqrt{2}$$

per cui il triangolo è equilatero; il suo centro (baricentro del triangolo) ha coordinate $O\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$

il quarto vertice del tetraedro giace pertanto sulla retta passante per O, normale al piano α, la cui equazione parametrica è:

$$\begin{cases} x = \frac{7}{3} + t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{4}{3} + t \end{cases}$$

imponendo la distanza dal punto A:

$$\overline{AO} = \sqrt{\left(\frac{7}{3} + t - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + t - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + t\right)^2} = 2\sqrt{2}$$

si ottiene $t = \pm\frac{4}{3}$, per cui i due possibili vertici del tetraedro regolare sono:

$$V_1\left(\frac{11}{3}; \frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right) \quad e \quad V_2\left(1; -1; 0\right)$$

10

Si ha:

$$y' = 2ke^{kx+2}$$

$$y'' = 2k^2e^{kx+2}$$

per cui:

$$e^{kx+2}\left(2k^2 - 4k - 6\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 3 \vee k = -1$$