Esame di Stato 2017 – sessione suppletiva

Problema 1

1

Indichiamo con $p_{AB} = x$ la probabilità che il varco AB sia aperto, con $p_{\overline{AB}} = 1 - x$ la probabilità che sia chiuso.

Essendo la pedina in A, si ha:

$p_1(x) = p_{\overline{AB}} \cdot p_{\overline{AC}} = (1-x)^2$ (chiusi entrambi i varchi comunicanti con A, indifferente il varco tra B e C);

$p_2(x) = p_{AB} \cdot p_{\overline{AC}} \cdot p_{\overline{BC}} + p_{AC} \cdot p_{\overline{AB}} \cdot p_{\overline{BC}} = x(1-x)^2 + x(1-x)^2 = 2x(1-x)^2$

$p_3(x) = p\left[(3 \text{ varchi aperti}) \vee (2 \text{ varchi aperti e } 1 \text{ chiuso})\right] = x^3 + 3x^2(1-x)$

oppure tramite l'evento complementare

$p_3(x) = 1 - p_1(x) - p_2(x) = 1 - (1-x)^2 - 2x(1-x)^2 = 3x^2 - 2x^3 = x^3 + 3x^2(1-x)$

Per disegnare i grafici delle tre funzioni, facciamo un sommario studio di funzione; si può omettere lo studio del segno in quanto le tre funzioni rappresentano, nell'intervallo considerato, delle probabilità, per cui soddisfano la condizione $0 \le p_i(x) \le 1 \quad i = 1,2,3$.

$y = p_1(x)$ rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse y e vertice $(1;0)$ con $p_1(0) = 1$;

$y = p_2(x) = 2x(1-x)^2$:

$p_2(0) = p_2(1) = 0$

$p_2'(x) = 2(3x^2 - 4x + 1) \ge 0$ per $x \le \frac{1}{3} \vee x \ge 1$

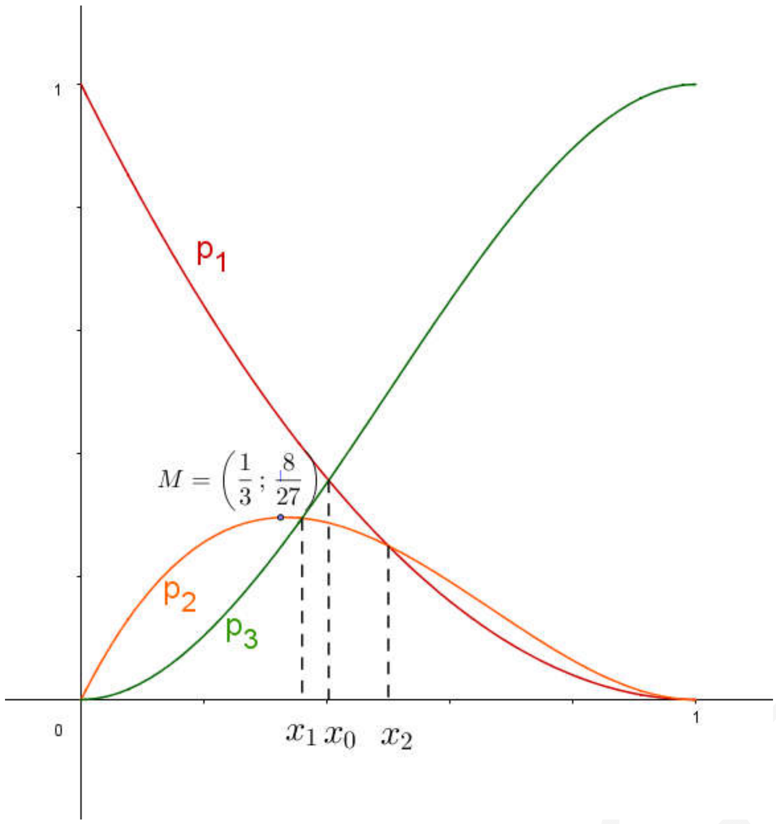
$$\begin{array}{c|c|c|}
p_2'(x) & + & - \\
p_2(x) & \nearrow & \searrow \\
\end{array}$$
$$0 \qquad \frac{1}{3} \qquad 1$$

che presenta un massimo assoluto in $\left(\frac{1}{3}; \frac{8}{27}\right)$; il punto $(1;0)$ è stazionario (curva tangente all'asse *x*);

$y = p_3(x) = 3x^2 - 2x^3$:

$p_3(0) = 0$ e $p_3(1) = 1$

$p_3'(x) = 6x(1-x) \ge 0$ per $0 \le x \le 1$ (entrambi gli estremi dell'intervallo sono punti stazionari)



2

La prima proposizione è vera: infatti se le tre probabilità risultassero, per qualche valore di *x*, minori o uguali di 0,3, si avrebbe:

$p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)\le 3\cdot 0,3=0,9\le 1$ assurdo in quanto le tre probabilità esauriscono tutti i casi possibili, quindi $p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)=1$.

Analogamente è vera anche la seconda proposizione: procedendo per assurdo come nel caso precedente, se nessuna delle tre probabilità fosse minore di 0,4, si avrebbe:

$p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)\ge 3\cdot 0,4=1,2$ assurdo; inoltre risulta $p_2(x)\le \dfrac{8}{27}<0,4$; essendo le due proprietà vere per ogni *x*, è vera anche la loro congiunzione (AND).

3

Come dedotto al punto 1, nell'intervallo $[0;1]$ $p_1(x)$ è strettamente decrescente e $p_3(x)$ è strettamente crescente, quindi le due curve si incontrano in un solo punto; per stimarne il valore consideriamo la funzione

$$f(x)=p_1(x)-p_3(x)=(1-x)^2-x^3-3x^2(1-x)=2x^3-2x^2-2x+1$$

strettamente decrescente nello stesso intervallo (in quanto $-p_3(x)$ è decrescente, per cui $f(x)$ risulta essere somma di due funzioni decrescenti); inoltre $f(0)=1$ e $f(1)=-1$

essendo $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}<0$ si ha $x_0<\frac{1}{2}$.

Cerchiamo gli altri punti di intersezione tra le curve (v. figura per la notazione):

$$p_1(x)\cap p_2(x) \quad\Rightarrow\quad (1-x)^2=2x(1-x)^2 \quad\Rightarrow\quad x=1 \quad\vee\quad x=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{1}{2}$$

$$p_2(x)\cap p_3(x) \quad\Rightarrow\quad 2x(1-x)^2=3x^2-2x^3 \qquad\Rightarrow\quad x=0 \quad\vee\quad x=\frac{7\mp\sqrt{17}}{8} \quad\Rightarrow\quad x_1=\frac{7-\sqrt{17}}{8}$$

Osservando il grafico si ha pertanto:

$$\begin{cases} se\ \ 0\le x\le x_1 & p_1>p_2\ge p_3 \\ se\ \ x_1<x\le x_0 & p_1\ge p_3>p_2 \\ se\ \ x_0<x\le x_2 & p_3>p_1\ge p_2 \\ se\ \ x_2<x\le 1 & p_3>p_2\ge p_1 \end{cases}$$

l'uguaglianza è verificata solo negli estremi chiusi di ogni intervallo.

4

La prima richiesta riguarda semplicemente il calcolo della media integrale delle tre funzioni, ma non ha particolare significato in termini di probabilità:

$$\overline{f}=\frac{\int_a^a f(x)\,dx}{b-a}$$, per cui

$$\overline{p_1}=\int_0^1(1-x)^2\,dx=\frac{1}{3}\left|(x-1)^3\right|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$\overline{p_2}=\int_0^1 2x(1-x)^2\,dx=2\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=2\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right|_0^1=\frac{1}{6}$$

$$\overline{p_3}=\int_0^1\left(-2x^3+3x^2\right)dx=\left|-\frac{1}{2}x^4+x^3\right|_0^1=\frac{1}{2}$$

Il secondo calcolo richiede invece di considerare la distribuzione di probabilità della variabile *X = numero di settori raggiungibili*, fissato $x=\frac{1}{2}$.

Si ha innanzitutto:

$$p_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\quad p_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\quad p_3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Per cui $\mu=E(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$

$$\operatorname{var}(X)=E\left(X^2\right)-\mu^2=1\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{2}-\frac{81}{16}=\frac{11}{16}$$

Problema 2

1

Perché i grafici delle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano tangenti in un punto x_0 devono valere le condizioni:

$$f(x_0)=g(x_0) \quad \wedge \quad f'(x_0)=g'(x_0)$$

Procedendo con il calcolo:

$$f'(x)=g'(x)\operatorname{sen}2x+2g(x)\cos 2x$$

Nei punti $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$, si ha:

$$f\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=g\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=g\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right) \quad \text{e}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=g'\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+2g\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=g'\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$$

quindi i due grafici sono tangenti in tali punti.

2

Scriviamo l'equazione nella forma:

$$\frac{dg(x)}{dx}=-2g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dg(x)}{g(x)}=-2\,dx$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili; procedendo nel calcolo:

$$\int\frac{dg(x)}{g(x)}=-2\int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|g(x)|=-2x+c \quad \Rightarrow \quad |g(x)|=e^{-2x+c}=e^{-2x}\cdot e^{c} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(x)=k\,e^{-2x} \qquad k\in\mathbb{R}_0$$

Imponendo la condizione al contorno, si ha infine:

$g(0)=4 \quad \Rightarrow \quad k=4$, per cui la funzione richiesta è: $g(x)=4e^{-2x}$

3

Riscriviamo $f(x)$ utilizzando la funzione $g(x)$ individuata:

$$f(x)=4e^{-2x}\operatorname{sen}2x \qquad \text{da cui:}$$

$$f'(x)=-8e^{-2x}\operatorname{sen}2x+8e^{-2x}\cos 2x=8e^{-2x}(\cos 2x-\operatorname{sen}2x)$$

$$f''(x) = -16e^{-2x}(\cos 2x - \operatorname{sen} 2x) + 16e^{-2x}(-\operatorname{sen} 2x - \cos 2x) = -32e^{-2x}\cos 2x$$

Si ha pertanto:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right) = 8e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right) = -8e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} \neq 0$$

Quindi i punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4}+k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ non sono punti stazionari (pertanto, essendo $f(x)$ derivabile in $\mathbb{R}$, non possono essere massimi).

$f(x)$ taglia l'asse x nei punti tali che $f(x) = 4e^{-2x}\operatorname{sen} 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

Poiché si ha:

$$f''\left(k\frac{\pi}{2}\right) = -32e^{-k\pi}\cos k\pi = (-1)^{k+1}\cdot 32e^{-k\pi} \neq 0$$

essi non sono punti di flesso.

4

$I = \int_0^{+\infty} 4e^{-2x}\operatorname{sen} 2x\, dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\operatorname{sen} t\, dt$ avendo posto il cambiamento di variabile $2x = t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}dt$

(gli estremi di integrazione in questo caso non cambiano)

Calcolando, per semplicità notazionale, la primitiva, si ha:

$$\int e^{-t}\operatorname{sen} t\, dt = -e^{-t}\operatorname{sen} t + \int e^{-t}\cos t\, dt = -e^{-t}\operatorname{sen} t - e^{-t}\cos t - \int e^{-t}\operatorname{sen} t\, dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{-t}\operatorname{sen} t\, dt = -\frac{1}{2}e^{-t}(\operatorname{sen} t + \cos t) + c$$

da cui:

$$I = \int_0^{+\infty} 4e^{-2x}\operatorname{sen} 2x\, dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\operatorname{sen} t\, dt = \left|-e^{-t}(\operatorname{sen} t + \cos t)\right|_0^{+\infty} = 1$$

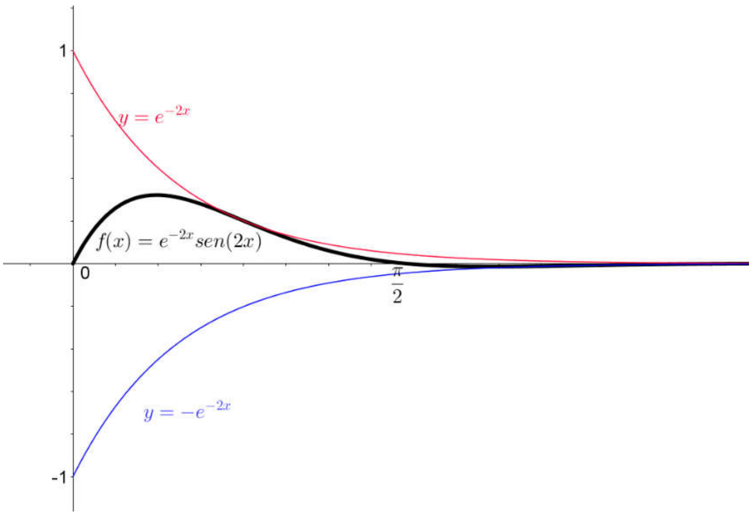
Si ha poi:

$$H = \int_0^{+\infty} \left|4e^{-2x}\operatorname{sen} 2x\right| dx = 4\int_0^{+\infty} e^{-2x}\left|\operatorname{sen} 2x\right| dx < 4\int_0^{+\infty} e^{-2x}\, dx = \left|-2e^{-2x}\right|_0^{+\infty} = 2$$

per cui *H* è finito.

Essendo $-e^{-2x} \le f(x) \le e^{-2x}$, si può rappresentare, per $x \ge 0$, il grafico di $f(x)$ come nella figura successiva.

La funzione $f(x)$ oscilla attorno all'asse *x*, individuando regioni finite di piano, alternativamente al di sopra e al di sotto dello stesso, limitate da segmenti sull'asse *x* di lunghezza $\frac{\pi}{2}$ (distanza tra due zeri consecutivi) e dal grafico della curva.



I è un integrale improprio il cui valore numerico indica la differenza tra la somma delle aree di suddette regioni situate al di sopra dell'asse *x* e la somma delle aree di quelle al di sotto dello stesso.

H indica invece la somma di tutte le aree. La parte di piano interessata non è limitata a destra, ma la sua estensione è finita.

Per stimare H, calcoliamo l'area delle prime due regioni:

$$H_1 = \int_0^{\pi/2} 4e^{-2x}\text{sen}\,2x\,dx = 2\int_0^{\pi} e^{-t}\text{sen}\,t\,dt = \left|-e^{-t}\left(\text{sen}\,t + \cos t\right)\right|_0^{\pi} = 1 + e^{-\pi} \approx 1,043$$

$$H_2 = -\int_{\pi/2}^{\pi} 4e^{-2x}\text{sen}\,2x\,dx = -2\int_{\pi}^{2\pi} e^{-t}\text{sen}\,t\,dt = \left|e^{-t}\left(\text{sen}\,t + \cos t\right)\right|_{\pi}^{2\pi} = e^{-2\pi} + e^{-\pi} \simeq 0,045$$

Inoltre $\sum_{i=3}^{+\infty} H_i = \int_{\pi}^{+\infty} \left|4e^{-2x}\text{sen}\,2x\right| dx < 4\int_{\pi}^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \left|-2e^{-2x}\right|_{\pi}^{+\infty} = 2e^{-2\pi} \simeq 0,002$

per cui $H_1 + H_2 \approx 1,088$ costituisce un'ottima approssimazione dell'integrale richiesto, con errore inferiore allo 0,2%.

QUESTIONARIO

1

L'area richiesta è data dall'integrale improprio della funzione assegnata nell'intervallo $\left[a;+\infty\right[$:

$$R_a = \int_a^{+\infty} e^{3-x}\,dx = \left|-e^{3-x}\right|_a^{+\infty} = e^{3-a} = 2 \quad \Rightarrow \quad 3-a = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad a = 3-\ln 2$$

2

Il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ indica la direzione normale al piano, per cui l'equazione richiesta è immediatamente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3t \\ 2t \\ 3-t \end{pmatrix}$$

3

Perché *p(x)* sia una distribuzione di probabilità si deve avere:

$$\int_0^2 p(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 k\left(2x^2 - x^3\right)dx = k\left|\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right|_0^2 = \frac{4}{3}k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{4}$$

per cui il valor medio risulta:

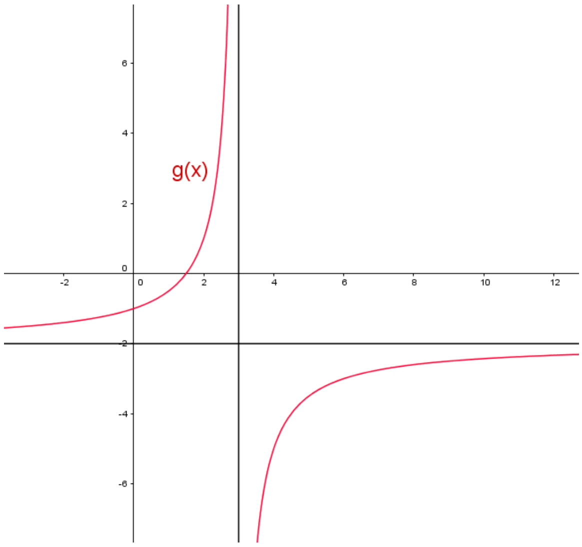
$$\mu = \int_0^2 x\,p(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}\int_0^2\left(2x^3 - x^4\right)dx = \frac{3}{4}\left|\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right|_0^2 = \frac{6}{5}$$

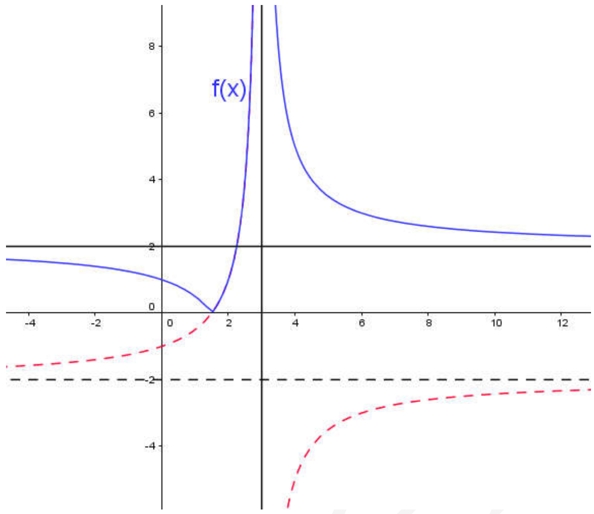
4

Consideriamo preliminarmente la funzione

$$g(x) = \frac{3-2x}{x-3}$$

Si tratta di una funzione omografica di centro $(3;-2)$, asintoto orizzontale $y = -2$, asintoto verticale $x = 3$, passante per $(0;-1)$ e $\left(\frac{3}{2};0\right)$, il cui grafico è riportato in rosso nella figura successiva; il grafico di $f(x)$ (in blu) si trova ribaltando attorno all'asse *x* le parti di curva che giacciono al di sotto dello stesso asse *x*; $f(x)$ ha come asintoto orizzontale la retta $y = 2$.





- $f(x)$ è continua in $[0;2]$ e in $[4;6]$;
- $f(x)$ non è derivabile in $]0;2[$ (punto angoloso in $\left(\frac{3}{2};0\right)$ mentre è derivabile in $]4;6[$

Il Teorema di Lagrange è pertanto applicabile solo nell'intervallo $[4;6]$, dove si ha:

$$f'(x) = -\frac{3}{(x-3)^2} \quad \text{e, dovendo essere:}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(6)-f(4)}{6-4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{(x_0-3)^2} = \frac{-2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 3 \mp \sqrt{3}$$

solo il punto di ascissa $x_0 = 3+\sqrt{3}$ è interno all'intervallo $]4;6[$

Non esistono intervalli $[a;b]$ in cui sia possibile applicare il Teorema di Rolle alla funzione $f(x)$:

dovendosi avere $f(a)=f(b)$, si può constatare immediatamente dal grafico di $f(x)$ che, presi su di esso due punti aventi la stessa ordinata, tra di essi è compreso o il punto angoloso $x=\frac{3}{2}$ o il punto di discontinuità $x=3$.

5

$$f(x) = f^{(0)}(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$$

$$f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x + \operatorname{sen} x$$

$$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x + \cos x = f^{(0)}(x)$$

Le derivate successive si presentano con periodicità 4, pertanto:

$$f^{(2017)}(x) = f^{(2016+1)}(x) = f^{(4\cdot 504+1)}(x) = f^{(1)}(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$$

6

Scriviamo l'equazione della retta, che indicheremo con *r*, in forma parametrica (o vettoriale)

$$\begin{cases} x = 3+3t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La distanza punto retta è la distanza minima tra il punto P e un punto qualunque della retta, ovvero

$$d = \min\left(\sqrt{(6-3-3t)^2 + (6-t)^2 + (8-1-t)^2}\right) = \min\left(\sqrt{11t^2 - 44t + 94}\right)$$

È sufficiente minimizzare il radicando, per cui derivando si ottiene $22t - 44 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2$, da cui la distanza punto-retta vale $d = 5\sqrt{2}$.

Alternativamente si può procedere in modo geometrico, determinando dapprima l'equazione del fascio di piani perpendicolare alla retta data:

$$3x + y + z + \delta = 0$$

Imponendo quindi il passaggio per $P(6,6,8)$ si determina δ= -32, da cui il piano cercato ha equazione

$$3x + y + z - 32 = 0$$

La cui intersezione *H* con la retta *r* è data da:

$$3(3+3t) + t + 1 + t - 32 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad H(9,2,3)$$

Infine:

$$d = \overline{PH} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

7

Siano $p_A = \frac{2}{3}$ e $p_B = \frac{1}{3}$ rispettivamente le probabilità di avere un lancio favorevole ad Alberto e a Barbara.

La probabilità che entrambi realizzino almeno un punto in una partita è il complementare dell'evento che Alberto o Barbara vincano 6-0; eventi che si verificano solo se si realizza per 6 volte consecutive un lancio favorevole ad Alberto o per 3 volte consecutive uno favorevole a Barbara:

$$P\left(\left(A\geq 1\right)\wedge\left(B\geq 1\right)\right)=1-P\left(A=0\right)-P\left(B=0\right)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^6-\left(\frac{1}{3}\right)^3\approx 0,875$$

Il punteggio 4-4 può realizzarsi se, su 6 lanci, 4 in qualsiasi ordine sono favorevoli ad Alberto e 2 a Barbara:

$$P\left(4-4\right)=\binom{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2\approx 0,329$$

8

Derivando l'equazione della curva δ si ha:

$y'=3x^2-4x+1$

Cerchiamo quindi in quali punti tale funzione assume una alla volta, il valore del coefficiente angolare delle due rette:

per *r*: $3x^2-4x+1=5 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{2}{3} \quad\vee\quad x=2$

Per la curva δ: $y\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{23}{27} \quad e \quad y\left(2\right)=3$ mentre per la retta: $y\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{28}{3} \quad \text{e} \quad y\left(2\right)=4$,

quindi *r* non è tangente a δ;

per *s*: $3x^2-4x+1=21 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{10}{3} \quad\vee\quad x=-2$

Per la curva δ: $y\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{517}{27} \quad e \quad y\left(-2\right)=-17$ mentre per la retta: $y\left(\frac{10}{3}\right)=95 \quad e \quad y\left(-2\right)=-17$,

quindi *s* è tangente a δ in (-2;-17)

9

$$V=2\pi\int_0^3 x\,f(x)\,dx=2\pi\int_0^3\left(x^3+x\right)dx=2\pi\left|\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right|_0^3=\frac{99}{2}\pi$$

10

Cerchiamo una funzione $g\left(x\right)$ polinomiale:

$$g^{(5)}(x)=1$$

integriamo successivamente scegliendo costanti che soddisfino le condizioni imposte

$$g^{(4)}(x)=\int g^{(5)}(x)\,dx=\int dx=x+c=x+1$$

$$g^{(3)}(x)=\int g^{(4)}(x)\,dx=\int\left(x+1\right)dx=\frac{x^2}{2}+x+c=\frac{x^2}{2}+x+1$$

$$g''(x)=\int g^{(3)}(x)\,dx=\int\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)dx=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+c=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x$$

$$g'(x)=\int g''(x)\,dx=\int\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x\right)dx=\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+c=\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}$$

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int\left(\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+c=\frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}$$