Esame di Stato 2017 – sessione straordinaria

Problema 1

1

Utilizzando la formula di sdoppiamento, la tangente all'ellisse nel punto $T(x_0; y_0)$ ha equazione

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1 \quad \Rightarrow \quad y=\left(1-\frac{x_0}{a^2}x\right)\frac{b^2}{y_0}$$

Imponendo il passaggio per (20; 0) si ottiene:

$$x_0=\frac{a^2}{20}$$

che, sostituito nell'equazione dell'ellisse, permette di ricavare l'ordinata di *T*

$$y_0=\frac{b}{20}\sqrt{400-a^2}$$

L'equazione del fascio di rette passanti per (20; 0) è:

$$y=m(x-20) \quad \Rightarrow \quad y=mx-20m$$

La pendenza *m* può essere ricavata derivando l'equazione della semiellisse situata nel semipiano $y\geq 0$:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

da cui, sostituendovi l'ascissa del punto *T*:

$$m=y'(T)=-\frac{b\dfrac{a^2}{20}}{a\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a^2}{20}\right)^2}}=-\frac{b}{\sqrt{400-a^2}}$$

L'equazione della tangente in *T* è pertanto:

$$y=-\frac{b}{\sqrt{400-a^2}}x+\frac{20b}{\sqrt{400-a^2}}$$

che interseca la retta AC: $y=10$ nel punto di ascissa

$$x=20-\frac{10\sqrt{400-a^2}}{b}$$

L'area della parte grigia in fig. 2 è pertanto

$$S=20-\left(20-\frac{10\sqrt{400-a^2}}{b}\right)\frac{10}{2}=\frac{50\sqrt{400-a^2}}{b}$$

2

$$\frac{a}{b}=\frac{20}{10}=2 \quad \Rightarrow \quad a=2b$$

$$S_{ellisse}=\pi ab=2\pi b^2=600\,m^2 \quad \Rightarrow \quad b^2=\frac{300}{\pi} \quad \Rightarrow \quad b=9,77\,m, \quad a=19,54\,m$$

L'area totale della parte grigia in fig. 1 vale pertanto

$$S_{tot}=4S=87,28\,m^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{tot}}{S_{terreno}}=0,109=10,9\%$$

3

Indicando con $s=s(t)$ lo spessore del ghiaccio, la velocità di produzione superficiale è data da:

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{k}{s}$$

dove *k* è una costante le cui dimensioni sono $[k]=\frac{cm^2}{h}$.

Risolvendo l'equazione differenziale, supponendo di partire dalla pista nonghiacciata (*s= 0*), si ha

$$\int_0^s s\,ds=\int_0^t k\,dt \quad \Rightarrow \quad \frac{s^2}{2}=kt \qquad \Rightarrow \quad s=\sqrt{2kt}$$

Imponendo che $s(3\,h)=3\,cm$ si ha

$$k=\frac{s^2}{2t}=\frac{3}{2}\frac{cm^2}{h}=1,5\,\frac{cm^2}{h} \qquad \text{per cui } s=\sqrt{2kt}=\sqrt{3t} \quad \text{(in cm)}$$

4

Il tempo richiesto per realizzare uno strato di ghiaccio di spessore 7,5 cm è pertanto:

$$t=\frac{s^2}{2k}=\frac{(7,5\,cm)^2}{3\,cm^2/h}=18,75\,h=18\,h\,45\,m$$

Problema 2

1

Le quattro funzioni assegnate sono pari, per cui baste verificare le condizioni richieste in x =1.

$$g_1(1) = g_2(1) = g_3(1) = g_4(1) = 0$$

$$g'_1(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'_1(1) = 1$$

$$g'_2(x) = \operatorname{sgn}(x) \quad \Rightarrow \quad g'_2(1) = 1$$

$$g'_3(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad \Rightarrow \quad g'_3(1) = 1$$

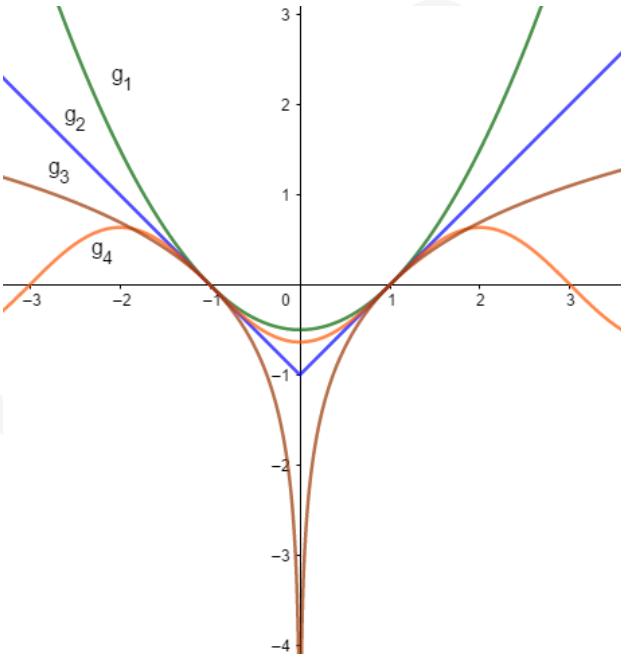
$$g'_4(x) = \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn}(x) \quad \Rightarrow \quad g'_4(1) = 1$$

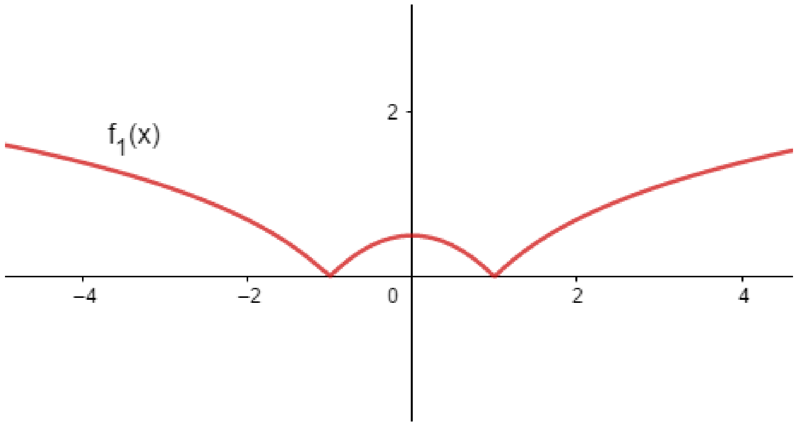
Quindi le quattro funzioni hanno le stesse rette tangenti nei punti di ascissa 1 e -1, di equazione rispettivamente:

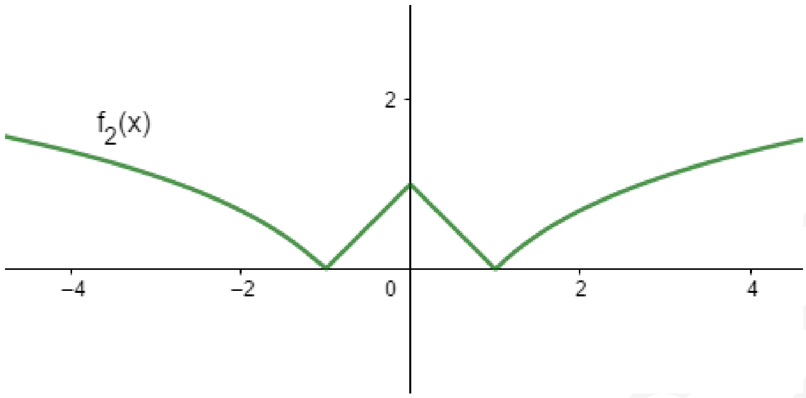
$$t_1 :\ y = x - 1,\ t_1 :\ y_2 = -x - 1$$

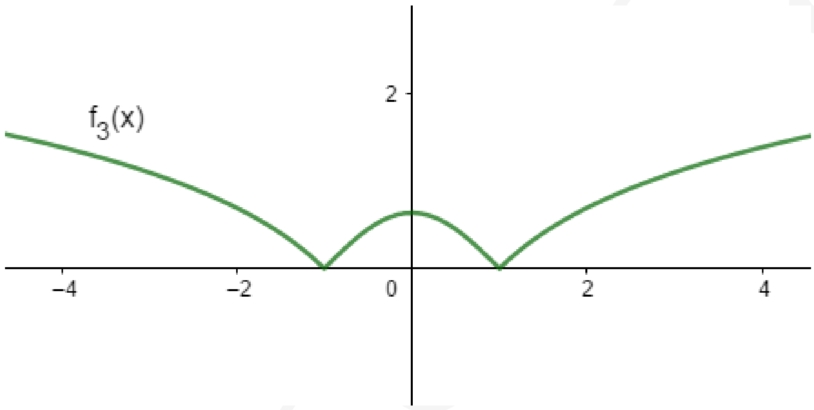
2

I grafici delle quattro curve sono riportati nella successiva figura









Tutte e tre le funzioni *f* presentano in $x = \pm 1$ un punto angoloso: indicata con f_n una delle tre funzioni, si ha:

$$\lim_{x \to -1^{\mp}} f_n{}'(x) = \mp 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^{\mp}} f_n{}'(x) = \mp 1$$

La funzione f_2 presenta un punto angoloso anche in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^{\mp}} f_2{}'(x) = \pm 1$$

Poiché le 3 funzioni f_n sono pari, si ha:

$$\int_{-e}^{e} f_n(x)\,dx = 2\int_0^e f_n(x)\,dx = 2\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx + \int_1^e f_n(x)\,dx\right) = 2\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx + \int_1^e \ln x\,dx\right) =$$

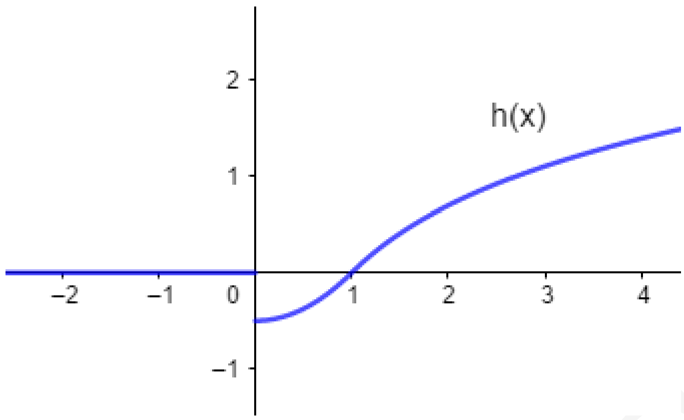
Ai fini della domanda è pertanto sufficiente verificare che

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)(x)\,dx < \int_0^1 \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx < \int_0^1 (1-x)\,dx$$

ovvero

$$\frac{1}{3} < \frac{4}{\pi^2} < \frac{1}{2}$$ quindi la disuguaglianza è verificata

3



La funzione *h(x)* è continua in $\mathbb{R}-\{0\}$; la funzione integrale *H(x)* è continua in $\mathbb{R}$, in particolare è continua nell'intervallo $\left[\sqrt{e}, e\right]$

Si ha poi:

$$H\left(\sqrt{e}\right) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx + \int_1^{\sqrt{e}} \ln x\,dx = \left|\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x\right|_0^1 + \left|x\ln x - x\right|_1^{\sqrt{e}} =$$

$$= \frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{e}-\sqrt{e}+1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{e} \simeq -0{,}16 < 0$$

$$H(e) = \int_{\sqrt{e}}^{e} \ln x\,dx = \left|x\ln x - x\right|_{\sqrt{e}}^{e} = -\frac{1}{2}\sqrt{e}+\sqrt{e} = \frac{1}{2}\sqrt{e} > 0$$

Quindi per il teorema di esistenza degli zeri, la H(x) am*mette uno zero nell'intervallo* $\left[\sqrt{e}, e\right]$*;* tale zero è unico in quanto, essendo *h(x)* positiva in tale intervallo*, H(x)* è ivi monotona crescente.

4

Per la parità delle due funzioni e tenendo conto della rotazione pari 1/6 di giro si ha:

$$V = 2\pi\frac{1}{6}\left[\int_0^1 \left((x-1)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)^2\right)dx\right] = \frac{\pi}{3}\int_0^1 \left(x^2-2x+1-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\int_0^1 \left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{3}{4}\right)dx = \frac{\pi}{3}\left|-\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{3}{4}x\right|_0^1 = \frac{\pi}{15}$$

QUESTIONARIO

1

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}$$

2

Dal momento che f(x) è composta da funzioni polinomiali, è continua e derivabile per $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Per x ≠2 si ha

$$f'(x)=\begin{cases}2kx-2 & x<2\\ 2x+k-1 & x>2\end{cases}$$

Per cui, imponendo la continuità di *f(x)* e di *f'(x)* in 2 si ha:

$$\begin{cases}\lim\limits_{h\to 2^-}\left(kx^2-2x+1\right)=f(2)\\ \lim\limits_{h\to 2^-}(2kx-2)=\lim\limits_{h\to 2^+}(2x+k-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4k-3=2k+1\\ 4k-2=3+k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=2\\ k=\frac{5}{3}\end{cases}$$

Quindi è impossibile soddisfare entrambe le condizioni.

3

$$V=\int_0^2\left(x^2+2\right)(x+1)\,dx=\int_0^2\left(x^3+x^2+2x+2\right)dx=\left|\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+2x\right|_0^2=\frac{44}{3}\text{ p}$$

4

$$P(4\,volte)=\binom{10}{4}0,28^4\cdot 0,72^6=0,18=18\%$$

Non è chiaro se il testo intenda che il bersaglio venga colpito solo le prime 4 volte oppure se possa essere colpito anche nei successivi 6 colpi. Calcoliamo pertanto entrambe le probabilità:

$$P(solo\ i\ \ primi\ 4\,colpi)=0,28^4\cdot 0,72^6=0,0009=0,09\%$$

$$P(almeno\ i\ \ primi\ 4\,colpi)=0,28^4=0,0061=0,61\%$$

5

Perché la tangente sia parallela alla bisettrice del I e III quadrante si deve avere:

$$f'(x)=3x^2+4x+k=1$$

Perché la tangente sia unica, il discriminante dell'equazione deve annullarsi:

$$\Delta = 4 - 3k + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{7}{3}$$

Con questa scelta di k, per le tangenti orizzontali si ha:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + \frac{7}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad impossibile$$

per cui non ci sono tangenti orizzontali

6

$$r = d(C, \pi) = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 - 22|}{\sqrt{9+16}} = 5$$

7

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{1 - 2\ln x}{x}$$

La retta tangente in un punto di coordinate $(a; \ln a - \ln^2 a)$ è:

$$y - \ln a + \ln^2 a = \frac{1 - 2\ln a}{a}(x - a)$$

Imponendo il passaggio per $(0;1)$:

$$1 - \ln a + \ln^2 a = \frac{1 - 2\ln a}{a}(-a) \quad \Rightarrow \quad \ln^2 a - 3\ln a + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\ln a - 1)(\ln a - 2) = 0$$

con soluzioni $a_1 = e,\ a_2 = e^2$; le due tangenti sono rispettivamente:

$$t_1:\ y = -\frac{1}{e}(x - e) \quad \Rightarrow \quad ey + x - e = 0$$

$$t_2:\ y + 2 = -\frac{3}{e^2}(x - e^2) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{e^2}x + 1 \quad \Rightarrow \quad e^2 y + 3x + e^2 = 0$$

8

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

9

$$P(2\ teste) = \binom{4}{2} p^2 \cdot (1 - p)^2 = \frac{8}{27}$$

Sviluppando il calcolo si ottiene:

$$\left(p-p^2\right)^2=\frac{4}{81} \quad \Rightarrow \quad p-p^2=\pm\frac{2}{9}$$

La sola soluzione positiva è accettabile in quanto, essendo $p<1$, si ha $p^2<p$, quindi $p-p^2>0$; risolvendo si ottengono i valori

$$p_1=\frac{1}{3} \text{ e } p_2=\frac{2}{3}$$

10

F(x) è una funzione (integrale) composta[1], per cui si ha:

$$F'(x)=2e^{2x}\ln e^{2x}=4xe^{2x}=g(x)$$

Derivando quest'ultima equazione si ottiene:

$$g'(x)=4e^{2x}(1+2x)=0$$

L'unico punto stazionario è pertanto $\left(-\frac{1}{2};-\frac{2}{e}\right)$

[1] Se $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad F'(x)=f[g(x)]\cdot g'(x)$