Esame di Stato 2017

Problema 1

1

Confrontiamo alcune proprietà della funzione con le informazioni deducibili dal grafico:

- $f(-x)=\sqrt{2}-\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}=f(x)$ quindi $f(x)$ è pari, simmetrica rispetto all'asse y, come da figura
- $f(0)=\sqrt{2}-1\approx 0,4$ compatibile con il grafico

Imponiamo che $f(a)=0$

$$\sqrt{2}-\frac{e^{-a}+e^{a}}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad e^{2a}-\sqrt{2}e^{a}+1=0 \quad\Rightarrow\quad e^{a}=\sqrt{2}\pm 1 \quad\Rightarrow\quad a=\ln\left(\sqrt{2}\pm 1\right)$$

Notiamo che

$$\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=\ln\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+1}=\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1}=-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Quindi le due soluzioni sono opposte; prendiamo quindi il valore positivo $a=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

Si ha ancora

$$f'(x)=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}$$

Da cui

$$\lim_{x\to a^-} f'(x)=\frac{e^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}-e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}}{2}=\frac{e^{\ln\left(\sqrt{2}-1\right)}-e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}}{2}=\frac{\sqrt{2}-1-\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}=-1$$

Quindi la semitangente forma un angolo di 135° con l'asse x, compatibile con il grafico.

2

Dall'ultimo calcolo del punto precedente, osservando che $f'(x)$ è dispari, essendo la derivata di una funzione pari, e considerando la periodicità introdotta con la costruzione di fig.3, segue immediatamente: $\lim_{x\to -a^+} f'(x)=\lim_{x\to a^+} f'(x)=-\lim_{x\to a^-} f'(x)=1$; le semitangenti nei punti in cui la funzione si annulla sono pertanto ortogonali.

Indicata con λ la lunghezza dell'arco, si ha

$$\lambda = 2\int_0^a \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx = 2\int_0^a \sqrt{1+\left[\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right]^2}\,dx = 2\int_0^a \sqrt{1+\frac{e^{-2x}+e^{2x}-2}{4}}\,dx = 2\int_0^a \frac{\sqrt{e^{-2x}+e^{2x}+2}}{2}\,dx =$$

$$= \int_0^a \sqrt{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2}\,dx = \int_0^a \left(e^{x}+e^{-x}\right)dx = \left|e^{x}-e^{-x}\right|_0^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} = e^{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} - e^{-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)} = \sqrt{2}+1-e^{\ln\left(\sqrt{2}-1\right)} =$$

$$= \sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right) = 2$$

3

Le indicazioni del testo consentono di assumere che la verticale condotta dal centro del quadrato, il punto C(x; d), passa per il punto di tangenza A(x, f(x)): i due punti sono infatti indicati nella figura con la stessa ascissa, anche se dimostrarlo è tutt'altro che banale, per cui appartengono ad una retta parallela all'asse y.

Con tale assunzione si ha:

$\tan LAM = \tan LCA = f'(x)$ (i due angoli *LAM* e *LCA* sono congruenti perché complementari dello stesso angolo *LAC*) da cui:

$$d = \overline{CA} + f(x) = \frac{\overline{LC}}{\cos LCA} + f(x) = \frac{1}{\cos LCA} + f(x)$$ ed essendo

$$\cos LCA = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 LCA}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}} = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$$

(è stato utilizzato il risultato già ottenuto al punto 2). Infine:

$$d = \overline{CA} + f(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} + \sqrt{2} - \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \sqrt{2}$$, costante al variare di x.

4

Con considerazioni analoghe a quelle svolte al punto 1, considerando che la nuova funzione differisce dalla prima per una costante, quindi ha la stessa derivata, si ha:

$$\lim_{x\to\left(\frac{\ln 3}{2}\right)^-} f'(x) = \frac{e^{-\frac{\ln 3}{2}} - e^{\frac{\ln 3}{2}}}{2} = \frac{e^{-\ln\sqrt{3}} - e^{\ln\sqrt{3}}}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

L'angolo formato dalla semitangente con l'asse x positivo è pertanto 150° (30° con l'asse x negativo); l'angolo tra le due semitangenti vale quindi 120°, da cui il poligono richiesto è un esagono regolare.

Procedendo ancora come al punto 2, si ottiene per il lato:

$$\lambda_e = 2\int_0^{\ln\sqrt{3}} \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx = \left|e^{x}-e^{-x}\right|_0^{\ln\sqrt{3}} = e^{\ln\sqrt{3}} - e^{-\ln\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Problema 2

1

Basandoci sui dati ricavabili dal grafico, scriviamo l'espressione analitica della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0;4]$

$$f(x)=\begin{cases} x & per\ 0\le x<1 \\ 2-x & per\ 1\le x<3 \\ x-4 & per\ 3\le x\le 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad f'(x)=\begin{cases} 1 & per\ 0\le x<1 \\ -1 & per\ 1<x<3 \\ 1 & per\ 3<x\le 4 \end{cases}$$

da cui, operando con la traslazione di vettore $\vec{v}\left(4k;0\right) \quad k\in\mathbb{Z}$, si può generalizzare in $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x-4k & per\ k\le x<1+k \\ 2+4k-x & per\ 1+k\le x<3+k \\ x-4-4k & per\ 3+k\le x<4+k \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z} \qquad f(x)=\begin{cases} 1 & per\ -1+k\le x<1+k \\ -1 & per\ 1+k<x<3+k \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

$f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$ ed è derivabile in $\mathbb{R}-\{1+4k,3+4k\}$.

Infatti, limitando lo studio all'intervallo $[0;4]$ si ha:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=1$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=-1$ quindi (1;1) è un punto angoloso; analogamente lo è (3;-1).

Si ha:

$\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ in quanto la funzione, essendo periodica, continua ad oscillare tra -1 e 1; per una dimostrazione più formale, si possono considerare le successioni, ottenute a partire dalla funzione f(x)

$a_n=1 \quad per\ n=1+4k$ e

$b_n=-1 \quad per\ n=3+4k \quad k\in\mathbb{Z}$

che convergono, per *n* tendente all'infinito, verso due valori distinti.

Si ha poi

$-\frac{1}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{1}{x}$, da cui, utilizzando il teorema del confronto $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

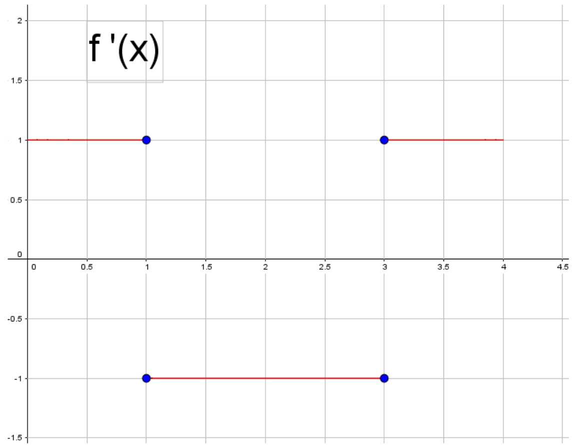
Determiniamo la funzione $h(x)$ negli intervalli opportuni:

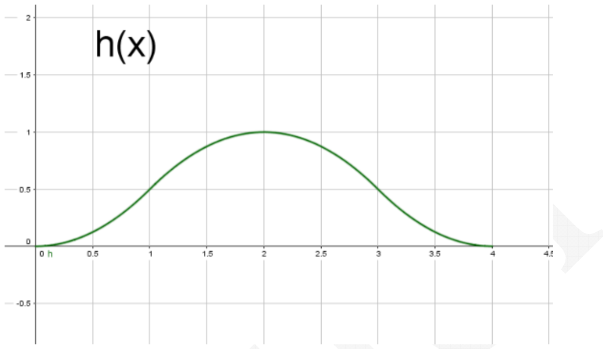
per $0\le x\le 1$: $h(x)=\int_0^x t\,dt=\frac{x^2}{2}$

per $1<x\le 3$: $h(x)=\frac{1}{2}+\int_1^x\left(2-t\right)dt=\frac{1}{2}+\left|2t-\frac{t^2}{2}\right|_1^x=-\frac{x^2}{2}+2x-1$

per $3<x\le 4$: $h(x)=\frac{1}{2}+\int_3^x (t-4)\,dt=\frac{1}{2}+\left|\frac{t^2}{2}-4t\right|_3^x=\frac{x^2}{2}-4x+8=\frac{x^2-8x+16}{2}=\frac{1}{2}(x-4)^2$

I due grafici sono quindi (nei punti di ascissa 1 e 3 f'(x)) non esiste):

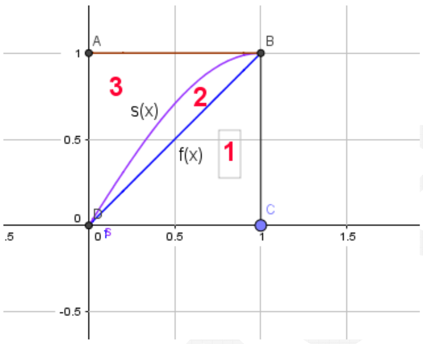




2

La funzione s(x) ha periodo $T=\frac{2\pi}{b}=4 \quad \Rightarrow \quad b=\frac{\pi}{2}$; riscriviamola pertanto nella forma

$s(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Le due funzioni *f(x)* e *s(x)* sono riportate in figura nell'intervallo $[0;1]$.



Avendo il quadrato OABC area unitaria, le probabilità richieste coincidono con le aree delle tre regioni di piano indicate con 1, 2 e 3.

Si ha:

$$P_1=\frac{1}{2} \quad \text{(area del triangolo OBC)}$$

$$P_2=\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx-\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\left|-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|_0^1-\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\simeq 0{,}137$$

$$P_3=1-P_1-P_2=1-\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2}{\pi}\simeq 0{,}363$$

3

Indichiamo con P'_1, P'_2, P'_3 le probabilità in questo secondo caso.

Essendo $0 \le f(x) \le s(x) \le 1$ si ha $0 \le [f(x)]^2 \le f(x) \le 1$, per cui $P'_1 < P_1$ (per $x \ne 0\ e\ x \ne 1$ vale la disuguaglianza stretta $[f(x)]^2 < f(x)$).

Analogamente, $0 \le [s(x)]^2 \le s(x) \le 1$ per cui l'area della regione di piano compresa entro il triangolo curvilineo OAB, chiuso dalla curva di equazione $y = [s(x)]^2$ aumenta, per cui $P'_3 > P_3$.

La questione non è invece evidente per P'_2, per cui procediamo con il calcolo numerico.

$$P'_1 = \int_0^1 x^2\, dx = \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} < P_1$$

$$P'_3 = 1 - \int_0^1 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = 1 - \int_0^1 \frac{1-\cos(\pi x)}{2}\, dx = 1 - \frac{1}{2}\left|x - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)\right|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > P_3$$

$$P'_2 = 1 - P'_1 - P'_3 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \simeq 0{,}167 > P_2$$

4

$$V = 2\pi \int_0^3 x\, h(x)\, dx = 2\pi \left[\int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx + \int_1^3 \left(-\frac{x^3}{2} + 2x^2 - x\right) dx\right] = 2\pi \left(\left|\frac{x^4}{8}\right|_0^1 + \left|-\frac{x^4}{8} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right|_1^3\right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{8} - \frac{81}{8} + \frac{54}{3} - \frac{9}{2} + \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{83}{12}\pi$$

QUESTIONARIO

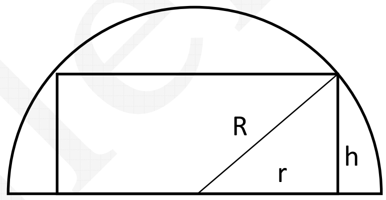
1

Integrando per parti si ha:

$$\int_0^1 x^2 e^x\, dx = \left| x^2 e^x \right|_0^1 - 2\int_0^1 x\ e^x\, dx = e - 2E$$

$$\int_0^1 x^3 e^x\, dx = \left| x^3 e^x \right|_0^1 - 3\int_0^1 x^2 e^x\, dx = e - 3(e - 2E) = 6E - 2e = 2(3E - e)$$

2



Consideriamo il cilindro di volume massimo inscrivibile in una semisfera di raggio R; siano r e h rispettivamente il raggio e l'altezza del cilindro.

SI ha:

$$V_C(h) = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - h^2\right)h = \pi\left(R^2 h - h^3\right)$$

Osserviamo che $V_C(0) = V_C(R) = 0$ e che $V_C(h) \geq 0 \quad \forall h \in [0; R]$.

Derivando rispetto ad h:

$V'_C(h) = \pi\left(R^2 - 3h^2\right)$ che si annulla, nell'intervallo considerato, per $h = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$; per le considerazioni iniziali, essendo l'unico punto stazionario nell'intervallo $[0; R]$, tale punto è massimo assoluto.

Considerando quindi il rapporto tra il volume massimo del cilindro e il volume della semisfera, si ha:

$$\frac{V_{C,MAX}}{V_{Semisfera}} = \frac{\pi\left(R^2 - \dfrac{R^2}{3}\right)\dfrac{R}{\sqrt{3}}}{\dfrac{2}{3}\pi R^3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577 < 0,6 = \frac{3}{5}$$

3

Perché il limite sia finito, il numeratore deve essere un infinitesimo del primo ordine; si ha quindi

$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{ax + 2b} - 6\right) = \sqrt{2b} - 6 = 0$ da cui *b* = 18

Procedendo al calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+36}-6}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{ax+36}-6\right)\left(\sqrt{ax+36}+6\right)}{x\left(\sqrt{ax+36}+6\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{ax}{12x} = \frac{a}{12} = 1$$

da cui segue a = 12.

4

Verifichiamo innanzitutto che $f(x)$ individua una distribuzione di probabilità:

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3=\frac{3}{4}x^2(2-x)\geq 0 \quad \forall x\in[0;2] \qquad \text{e}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)dx=\left|\frac{x^3}{2}-\frac{3}{16}x^4\right|_0^2=1$$

Si ha quindi:

$$\overline{f(x)}=\int_0^2 x\,f(x)\,dx=\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{3}{4}x^4\right)dx=\left|\frac{3}{8}x^4-\frac{3}{20}x^5\right|_0^2=6-\frac{24}{5}=\frac{6}{5}$$

$$P\left(\frac{4}{3}\right)=\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} f(x)\,dx=0$$

Gli eventi sono indipendenti, per cui l'informazione che il numero sia il secondo estratto non è rilevante:

$$P(x\leq 1)=\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)dx=\left|\frac{x^3}{2}-\frac{3}{16}x^4\right|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$$

5

L'equazione della retta in forma vettoriale risulta (O = origine del sistema di riferimento cartesiano):

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+5t\\3-3t\\1-2t\end{pmatrix}$$

Il vettore $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\-3\\-2\end{pmatrix}$ indica la direzione del piano per cui, considerando inizialmente il fascio di piani perpendicolari ad $\overrightarrow{AB}$, imponendo successivamente il passaggio per C, si ottiene:

$$5x-3y-2z+d=0 \quad\Rightarrow\quad 10-6+6+d=0 \quad\Rightarrow\quad d=-10$$

Per cui l'equazione richiesta è infine:

$$\pi:\ 5x-3y-2z-10=0$$

6

Applicando il Teorema di de l'Hôpital, si ottiene*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x}{x^a}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\frac{1}{ax^{a-3}}=-\frac{1}{2a}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{a-3}}\begin{cases}0 & se\ a<3\\ -\dfrac{1}{6} & se\ a=3\\ +\infty & se\ a>3\end{cases}$$

* per a non intero il limite ha senso solo per x che tende a 0^+; la questione non è comunque rilevante ai fini del quesito, in quanto viene richiesto solo il valore di *a* che rende il limite finito e non nullo.

7

I centri delle sfere tangenti si trovano sulla retta perpendicolare al piano passante per P, a distanza $\sqrt{6}$ dal piano stesso.

La retta cercata ha equazione:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\2t\\2-t\end{pmatrix}$$

$$d(C,\pi)=\frac{\left|(1+t)+2(2t)-(2-t)+1\right|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|6t|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\,|t|=\sqrt{6}\quad\Rightarrow\quad t=\pm 1$$

Da cui si ottengono i due centri richiesti:

$$C_1(2,2,1)\quad e\quad C_2(0,-2,3)$$

8

Il dado presenta 11 facce la cui probabilità di uscita è *q* e una con probabilità *p=2q*.

Si ha: $11q+2q=1\quad\Rightarrow\quad q=\frac{1}{13}=7,69\%\quad p=\frac{2}{13}=15,38\%$

Calcoliamo la probabilità richiesta mediante l'evento complementare: in 5 lanci, la faccia numero 3 esca al massimo una volta; si tratta di una distribuzione binomiale con valori di probabilità $\frac{2}{13}$ (esce la faccia 3) e $\frac{11}{13}$ (non esce la faccia 3).

$$P(F_3\ge 2)=1-\left[P(F_3=0)+P(F_3=1)\right]=1-\left[\left(\frac{11}{13}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\frac{11}{13}\right)^4\frac{2}{13}\right]=$$

$$=1-\frac{11^5+10\cdot 11^4}{13^5}=1-\frac{21\cdot 11^4}{13^5}\simeq 0,172=17,2\%$$

9

Le soluzioni reali dell'equazione fornita sono gli zeri della funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x + x^3 + e^x$, continua e derivabile in $\mathbb{R}$,essendo somma di funzioni continue e derivabili nello stesso insieme.

Si ha:

$$\lim_{x \to \mp\infty} \left(\operatorname{arctg} x + x^3 + e^x \right) = \mp\infty \qquad \text{e}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 + e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Risultano pertanto soddisfatte le condizioni del teorema di esistenza e unicità degli zeri, per cui la funzione f(x) si annulla esattamente in un punto.

10

$$f(x) = \left|4 - x^2\right| = \begin{cases} 4 - x^2 & per\ -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & per\ -3 \le x < -2 \vee 2 < x \le 3 \end{cases}$$

- $f(x)$ è continua in $[-3;3]$
- $f(x)$ non è derivabile in $[-3;3]$, presentando due punti angolosi per $x = \pm 2$

  si ha infatti: $f'(x) = -2x \operatorname{sgn}\left(4 - x^2\right) = \begin{cases} -2x & per\ -2 < x < 2 \\ 2x & per\ -3 < x < -2 \vee 2 < x < 3 \end{cases}$

  e $\lim_{x \to 2^{\mp}} \left[-2x \operatorname{sgn}\left(4 - x^2\right) \right] = \mp 4$
- $f(-3) = f(3) = 5$.

Non risulta pertanto verificata la seconda ipotesi del teorema di Rolle; tuttavia si ha $f'(0) = 0$.

Ciò non contraddice assolutamente il teorema di Rolle in quanto tale teorema, come tutti i teoremi non invertibili, presenta una condizione sufficiente ma non necessaria, ovvero:

- se le ipotesi sono verificate, l'enunciato espresso dalla tesi *è vero*
- l'enunciato espresso dalla tesi *potrebbe essere vero* anche senza che siano soddisfatte tutte le ipotesi.