Problema 1: Il porta scarpe da viaggio

Risoluzione

Punto 1

Dopo aver scelto come unità di misura (dm), dai dati si ricava che la curva deve passare per i punti $A\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $B\left(1, \frac{4}{5}\right)$, $C\left(2, \frac{6}{5}\right)$ e $D(3, 0)$

a) L' equazione $y = e^{\left(a \cdot x^2 + bx + c\right)} + (x + d)^2$ è da scartare perchè somma di una funzione esponenziale(per la quale non esiste nessun valore reale che la renda nulla), con una quantità al quadrato che è sempre non negativa, quindi $y \neq 0 \;\; \forall\, x \in \Re$, di conseguenza il punto $D(3, 0)$ non può soddisfare tale equazione.

b)L'equazione $y = \dfrac{\sin^2(a \cdot x + b) + \cos^2(a \cdot x + b)}{c \cdot x + d}$ è da scartare perchè dalla prima relazione fondamentale della goniometria sappiamo che il numeratore è sempre uguale a 1 e, di conseguenza, per i valori di x per cui esiste , il punto $C(3, 0)$ non può soddisfare tale equazione.

L'unica funzione che può soddisare le condizioni poste dal problema è rappresentata dalla cubica

$$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

Punto 2

Per trovare i coefficienti *a,b,c ed* consideriamo la condizione di appartenenza alla curva dei 4 punti.

$A\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $B\left(1, \frac{4}{5}\right)$ *punto di flesso*, $C\left(2, \frac{6}{5}\right)$ e $D(3, 0)$

$$\begin{cases} d = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{4}{5} = a + b + c + d \\ \dfrac{6}{5} = 8 \cdot a + 4 \cdot b + 2 \cdot c + d \\ 0 = 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d \end{cases}$$

$$\left\{a = -\frac{4}{15}, b = \frac{4}{5}, c = -\frac{2}{15}, d = \frac{2}{5}\right\} \qquad \textbf{(1.1)}$$

La curva ha equazione $y=-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5}$

$$y=-\frac{4}{15}x^3+\frac{4}{5}x^2-\frac{2}{15}x+\frac{2}{5} \quad \textbf{(1.2)}$$

Punto 3

Studio della funzione

$y=-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5}$

La funzione essendo polinomiale è definita $\forall$ x $\in \mathcal{R}$, tuttavia noi la studiamo e la rappresenteremo nell'intervallo [0,3]

Non calcoliamo f(-x) perchè in tale insieme la funzione non ha simmetrie evidenti cioè non è ne pari ne dispari.

Intersezione con l'asse delle ordinate

x=0 $y=\frac{2}{5}$

Intersezione con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} y=0 \\ y=-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5} \end{cases}$$

$-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5}=0$

$$-\frac{4}{15}x^3+\frac{4}{5}x^2-\frac{2}{15}x+\frac{2}{5}=0 \quad \textbf{(1.1.1)}$$

Semplifichiamo per 2 e facciamo il m.c.m.

$-2\,x^3+6x^2-\mathrm{x}+3=0$

$$-2x^3+6x^2-x+3=0 \quad \textbf{(1.1.2)}$$

$$-(x-3)\left(2x^2+1\right)=0 \quad \textbf{(1.1.3)}$$

Soluzione $\boldsymbol{x=3}$

I punti di intersezione con gli assi li conoscevamo già e sono
$A\left(0, \frac{2}{5}\right)$ e $D(3, 0)$

Segno della funzione

y>0 $-(x-3)\left(2x^2+1\right) > 0$ per x<3 .
Quindi nell'intervallo [0,3] la funzione è sempre positiva.

Nell'intervallo [0,3] non vanno ricercati ***A.O.*** e neanche **A. Obl.** perchè è un intervallo chiuso e limitato.
Inoltre non ci sono **A.V.** perchè non ci sono punti di discontinuità.
Calcoliamo la derivata prima per studiare la monotonia della funzione ed eventuali punti di massimo o di minimo.

Calcoliamo la deirivata prima

$$\frac{d}{dx} y(x) = -\frac{4}{5} x^2 + \frac{8}{5} x - \frac{2}{15} \tag{1.1.4}$$

Segno della derivata prima

$$\left\{x \le 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30},\ 1 - \frac{1}{6}\sqrt{30} \le x\right\} \tag{1.1.5}$$

y'≥ 0 $\qquad 1 - \frac{1}{6}\sqrt{30} \le x \le 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}$ y *cresce*

$y' < 0$

$per\ \ 0 \le x < 1 - \frac{1}{6}\sqrt{30}\ \ \vee\ \ 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30} < x \le 3\ \ y\quad decresce$

Dall'analisi della monotonia risulta che ∃ un punto di minimo relativo per x=
$1 - \frac{1}{6}\sqrt{30}$ e un massimo relativo nel punto

di ascissa x= $1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}$

$eval\left(-\frac{4}{15} \cdot x^3 + \frac{4}{5} \cdot x^2 - \frac{2}{15} \cdot x + \frac{2}{5}, x = 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\right)$

$$-\frac{4}{15}\left(1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^3 + \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^2 + \frac{4}{15} - \frac{1}{45}\sqrt{30} \tag{1.1.6}$$

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{27}\sqrt{30} \quad (1.1.7)$$

$$eval\left(-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5}, x=1-\frac{1}{6}\sqrt{30}\right)$$

$$-\frac{4}{15}\left(1-\frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^3+\frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^2+\frac{4}{15}+\frac{1}{45}\sqrt{30} \quad (1.1.8)$$

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{27}\sqrt{30} \quad (1.1.9)$$

$$\mathrm{Max}\left(1+\frac{1}{6}\sqrt{30}, \frac{4}{5}+\frac{2}{27}\sqrt{30}\right), \ \min\left(1-\frac{1}{6}\sqrt{30}, \frac{4}{5}-\frac{2}{27}\sqrt{30}\right)$$

Calcoliamo la derivata seconda

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=-\frac{8}{5}x+\frac{8}{5} \quad (1.1.10)$$

$$y''=-\frac{8}{5}x+\frac{8}{5}$$

$$y''\geq 0$$

$$solve\left(\left\{-\frac{8}{5}x+\frac{8}{5}\geq 0\right\}, x\right)$$

$$\{x\leq 1\} \quad (1.1.11)$$

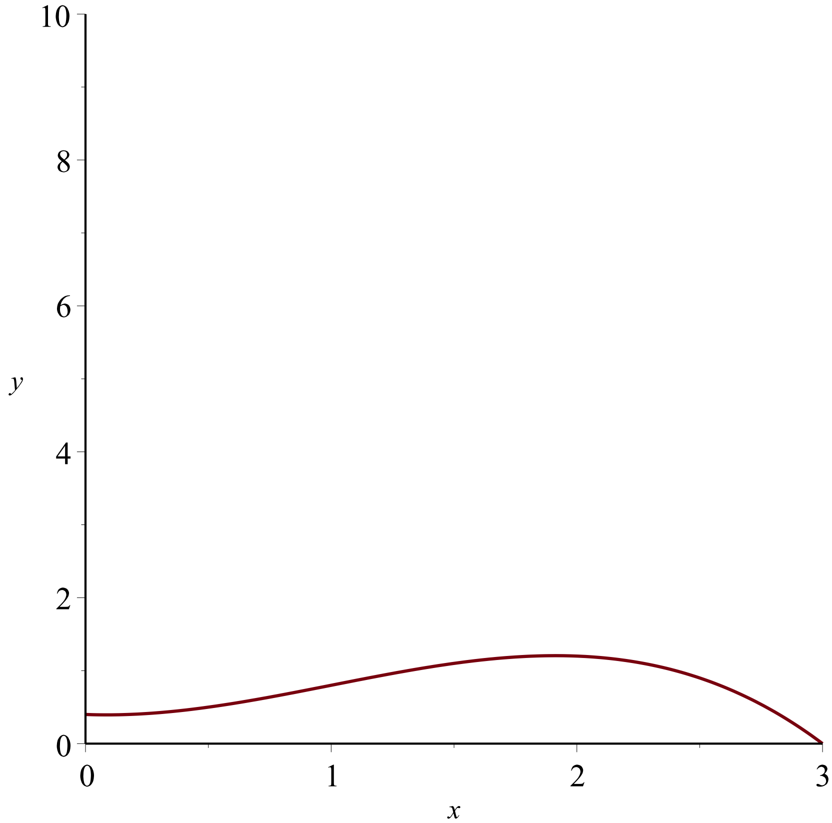
$y''>0 \quad 0\leq x\leq 1 \quad \cup$
$y''<0 \quad per \ 1<x<3 \quad \cap$

$y''>0 \quad se \quad 0\leq x\leq 1$ y convessa

$y''<0 \quad 1<x<3 \quad y \quad concava$ $\quad flesso\left(1, \frac{4}{5}\right)$ come indicato nelle ipotesi

rappresentiamo la curva

$$plot\left(-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5}, x=0..3, y=0..10\right)$$



Poichè l'ordinata del punto di massimo è approssimativamente data da

$y_M = evalf\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{27}\sqrt{30}, 3\right)$

$$y_M = 1.21 \qquad \textbf{(1.1.12)}$$

il contenitore può essere utilizzato per scarpe aventi una altezza massima di poco superiore a 12 cm e **quindi non può contenere scarpe alte 14 cm**

Punto 4

Per mostrare che il rapporto ricavo costi **non cresce indefinitamente**, indichiamo con n il numero di pantofole prodotte in un mese,
e definiamo tale rapporto:

$$\frac{15 \cdot n}{500 + 5 \cdot n}$$

Calcoliamo il $\lim_{n\to\infty} \frac{15\,n}{500+5\,n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{15\,n}{500+5\,n} = 3$$

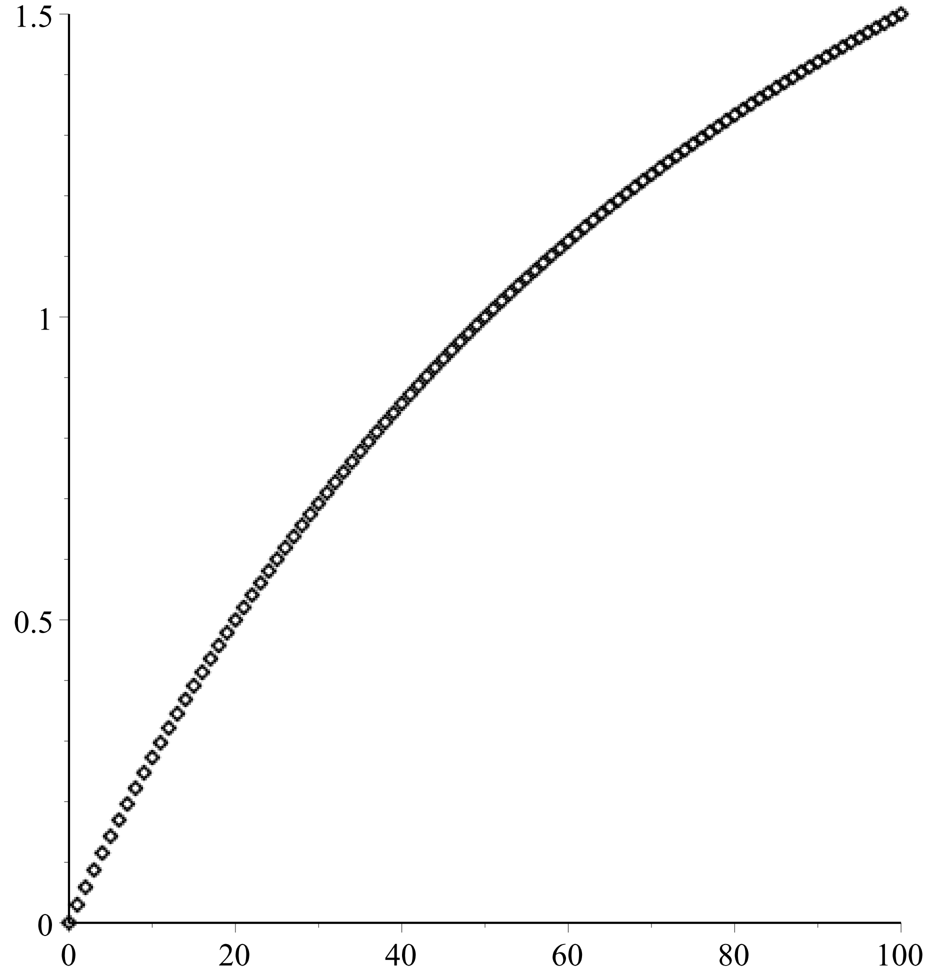
Otteniamo quindi che il ricavo, contrariamente a quanto pensava l'artigiano, al crescere di n si stabilizza e ***tende*** a diventare tre volte il costo

Vediamo come il processo si può rappresentare graficamente.

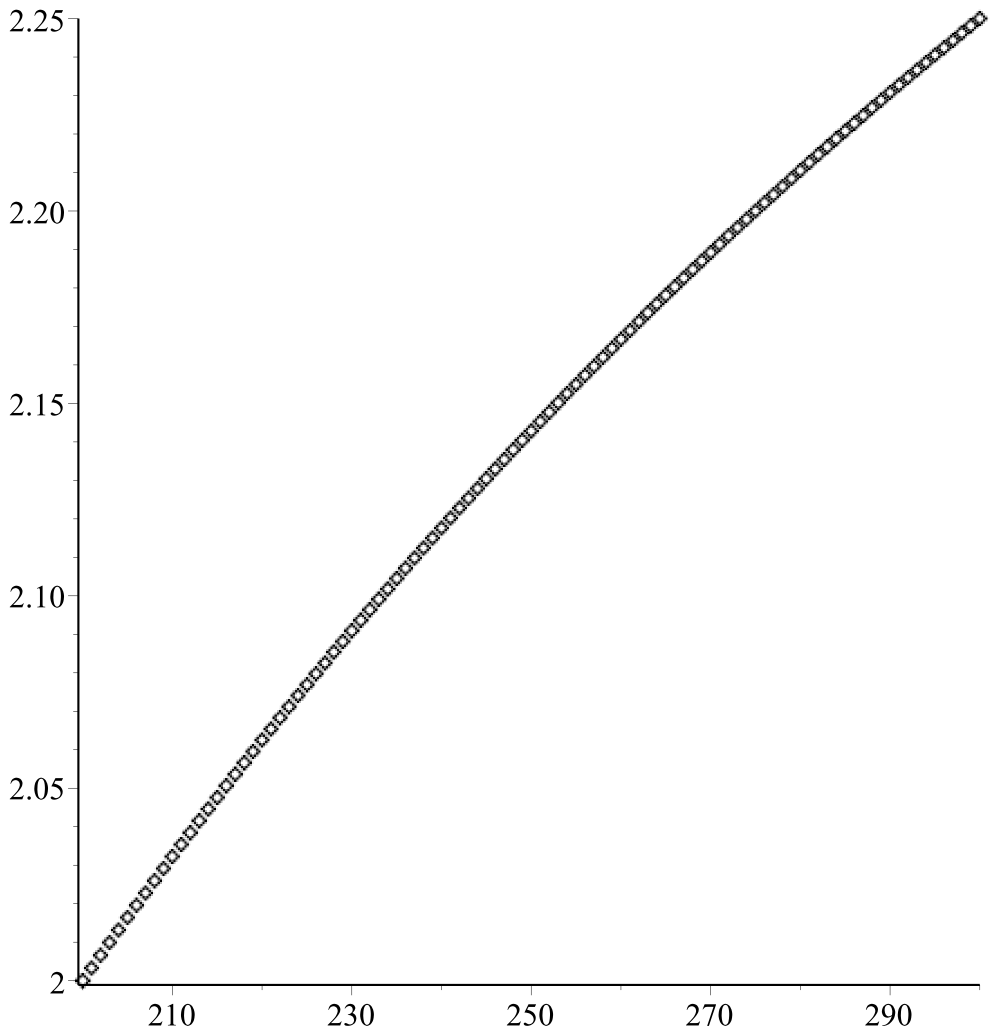
La funzione che rappresenta il rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese **è la successione**

$$a_n = \frac{15\cdot n}{500+5\cdot n}$$

Il suo grafico potrebbe essere **rappresentato per quantità discrete 0<n<100** come segue :



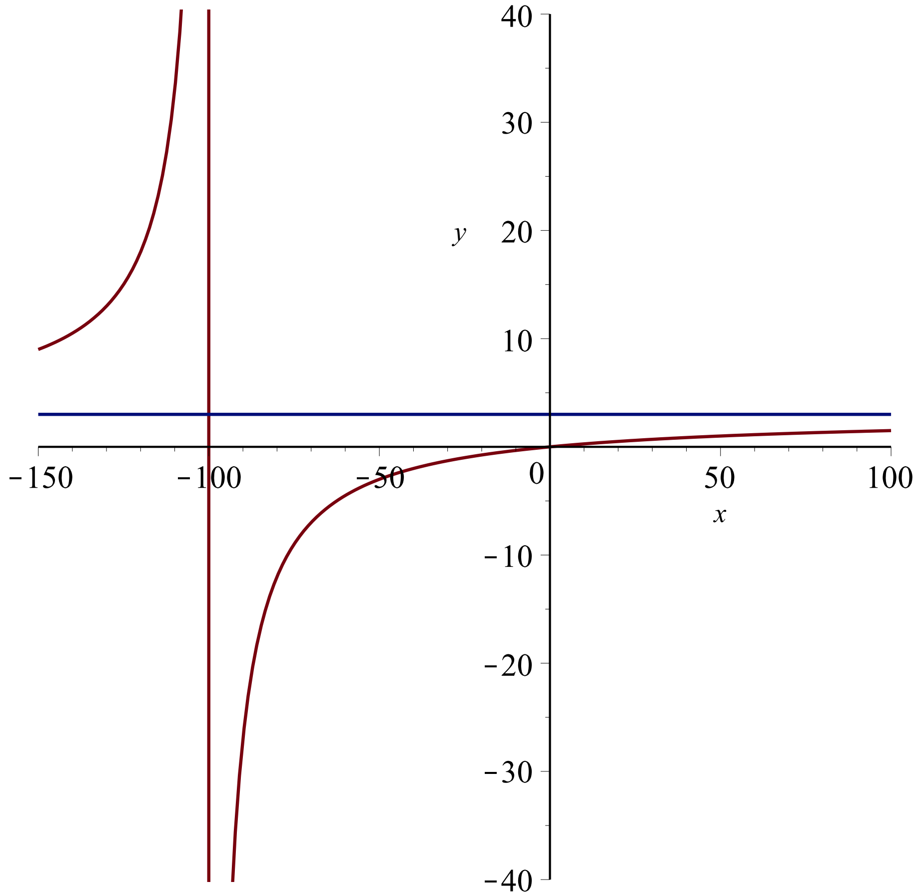
Analizzando il grafico si può dedurre che al crescere del numero dei contenitori prodotti il rapporto aumenta come pensa l'artigiano;
si può mostrare all'artigiano che affinchè il ricavo eguagli la spesa devono essere prodotti e **venduti almeno 50 contenitori**; solo raggiungendo i 200 contenitori (grafico per 200<n<300) il ricavo è doppio della spesa, superati i 200 contenitori il ricavo cresce.



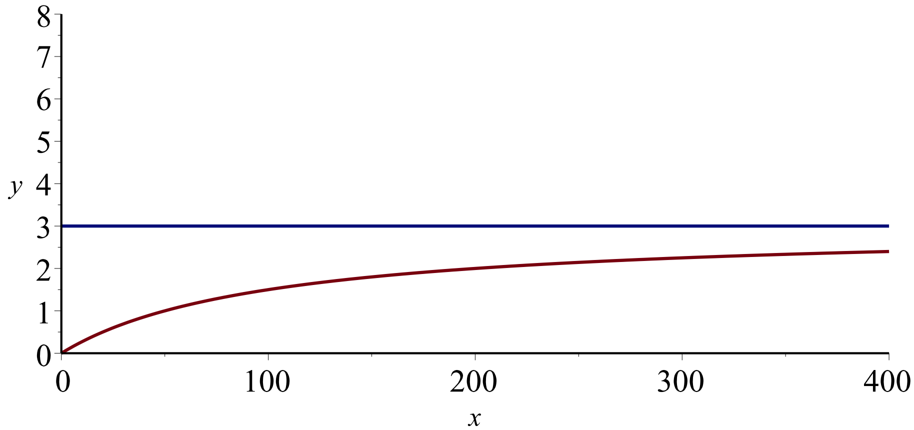
Per mostrare <u>graficamente</u> all'artigiano come il ricavo non cresce indefinitamente occorre mostrare nel grafico la stabilizzazione $(n \to \infty)$ e quindi dobbiamo associare al rapporto ricavo/costo la **funzione continua** che si ottiene sostituendo ad n (variabile discreta) la variabile continua $x \in \mathbb{R}$ e si ha :

$$y = \frac{15 \cdot x}{500 + 5 \cdot x}$$

Essa è una funzione omografica avente come asintoti le rette $x = -100$ (*asintoto verticale*) e $\boldsymbol{y = 3}$ (***asintoto orizzontale***)



Poichè però il numero di contenitori non può essere negativo, l'andamento della funzione che modellizza il rapporto ricavo/costo è costituito dalla parte di grafico che si ottiene per $x \geq 0$.
Tale grafico è :



Dal grafico si mostra all'artigiano che al crescere del numero dei contenitori prodotti il rapporto tende a stabilizzarsi e quindi non a crescere indefinitamente, in modo che il ricavo ***tende*** a diventare **il triplo della spesa**, puoi anche aggiungere all'artigiano, che sicuramente ti chiederà con quanti contenitori prodotti il ricavo è 3 volte il costo, che **il numero di contenitori che permette il 90% di 3 è 900, ma non è possibile che il rapporto ricavo/costo sia uguale a 3**, è molto complesso spiegare a chi non ha la competenza in matematica cos'è un asintoto orizzontale!

Problema n. 2 : Il ghiaccio

Risoluzione

Punto 1)

La superficie totale del prisma retto a base quadrata è $A_S = 2 \cdot b^2 + 4 \cdot b \cdot h$

$$A_S = 2\,b^2 + 4\,b\,h \qquad \textbf{(1)}$$

Sapendo che il volume è $V = b^2 \cdot h$

$$V = b^2\,h \qquad \textbf{(2)}$$

Si ha : $10\,dm^3 = b^2\,h$

$$10\,dm^3 = b^2\,h \qquad \textbf{(3)}$$

Ricaviamo l'altezza in funzione di b

$$h = \frac{10\,dm^3}{b^2} \qquad \textbf{(4)}$$

$$A_S = 2 \cdot b^2 + \frac{4 \cdot b \cdot 10}{b^2}$$

$$A_S = 2\,b^2 + \frac{40}{b} \qquad \textbf{(5)}$$

Con b non negativo essendo la misura di un segmento .
Il C.E. della funzione è perciò b>0
In tale insieme non ci sono simmetrie evidenti .
Inoltre è una funzione sempre positiva, nel suo insieme di definizione, perchè somma di quantità sempre positive.
$\nexists$Intersezioni con gli assi.

$$\lim_{b \to 0+} \left(2\,b^2 + \frac{40}{b}\right) \qquad \textbf{(6)}$$

$\lim_{b \to 0+} \left(2\,b^2 + \frac{40}{b}\right) = +\infty$ Asintoto verticale b=0 da destra

$\lim_{b \to +\infty} \left(2\,b^2 + \frac{40}{b}\right) = +\infty$ $\nexists$ asintoto orizzontale

$m = \lim_{b \to +\infty} \left(2\,b + \frac{40}{b^2}\right) = +\infty$ $\nexists$ asintoto obliquo

Calcolo la derivata prima

$diff\left(2\,b^2 + \frac{40}{b}, b\right)$

$$4\,b - \frac{40}{b^2} \tag{7}$$

La pongo uguale a 0

$$0 = \frac{4\,(b^3 - 10)}{b^2} \tag{8}$$

ottengo

$$\left\{10^{1/3} \le b\right\} \tag{9}$$

per b $> \sqrt[3]{10}$ la superficie cresce

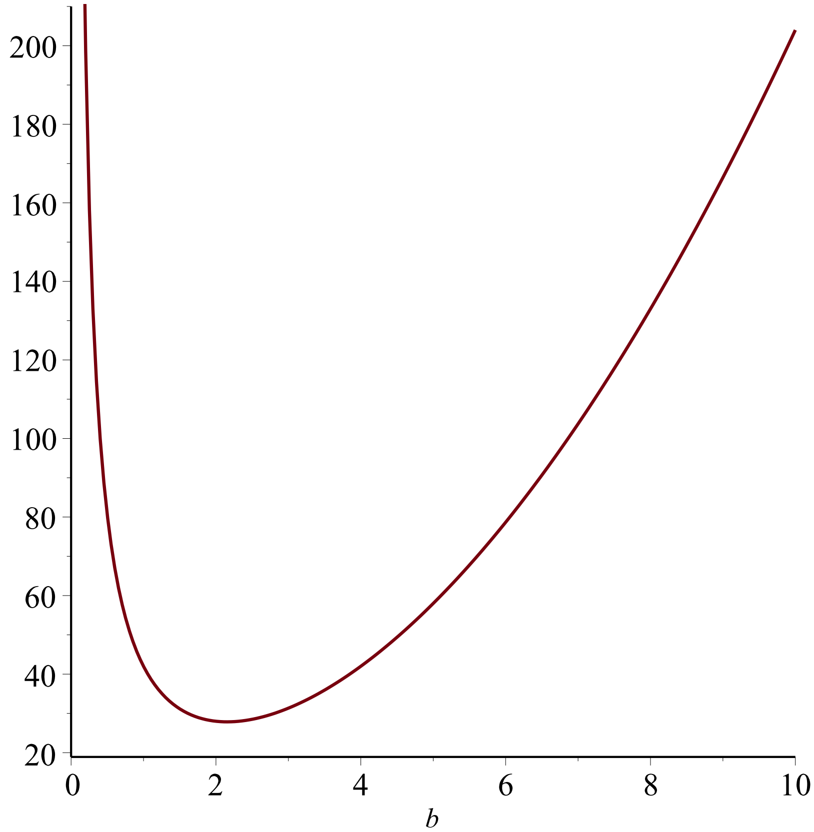
per $0 \le b < \sqrt[3]{10}$ la superficie decresce

per $\mathbf{b} = \sqrt[3]{\mathbf{10}}$ la superficie esposta sarà minima e vale

$$6\;10^{2/3} \tag{10}$$

$\min\left(\sqrt[3]{10}, 6 \cdot \sqrt[3]{10^2}\right)$

$plot\left(2 \cdot b^2 + \frac{40}{b}, b = 0\,..10\right)$



Punto 2

Il blocco scambierà calore attraverso la superficie (prima ipotesi aggiuntiva, scambio solo per conduzione), supponendo che sia coinvolta tutta la superficie, anche quella relativa alla base di appoggio (seconda ipotesi aggiuntiva),
 si ha:

$$A_S = 2 \cdot b^2 + \frac{4 \cdot b \cdot 10}{b^2}$$

$$A_S = 2\, b^2 + \frac{40}{b} \quad \textbf{(11)}$$

Dal precedentemente studio di questa funzione abbiamo visto che per b = $\sqrt[3]{10}$ la superficie esposta sarà minima e conseguentemente sarà minimo lo scambio termico.

Per tale valore di b l'altezza del blocco sarà $h = \dfrac{10}{\left(\sqrt[3]{10}\right)^2}$

$$h = 10^{1/3} \quad \textbf{(12)}$$

Si può dedurre quindi che lo scambio termico sarà minimo quando il blocco avrà la forma di un cubo .

Punto 3

Poichè il blocco tende a riscaldarsi, in funzione della differenza di temperatura tra il ghiaccio e l'ambiente,

per determinare quale funzione modellizzi il processo, consideriamo le tre funzioni

$$T(t) = (T_g - T_a)e^{-Kt}$$

$$T(t) = (T_a - T_g).(1 - e^{-Kt}) + T_g$$

e

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-Kt} - T_a$$

mettiamo al posto di T_g =-18°, T_a =10° ed esaminiamo i modelli matematici forniti

nel primo caso si ha

$T(t) =-28\cdot\exp(-t\cdot k)$

$$T(t) = -28\, e^{-tk} \quad \textbf{(13)}$$

verifichiamo se è soddisfatta la condizione iniziale per cui per t=0 la temperatura del ghiaccio deve essere -18°C

$T(0) = -28\, e^{-0\cdot k}$

$$T(0) = -28 \quad \textbf{(14)}$$

la funzione **non verifica le condizioni iniziali**, calcoliamo anche le condizioni finali asintotiche per t --> ∞,

$\lim_{t \to +\infty} (-28\cdot\exp(-t\cdot k)) = 0$

valore che **non corrisponde** al raggiungimento asintotico della temperatura ambiente (10°). **Funzione non adeguata a modellizzare il fenomeno.**

nel secondo caso si ha

$T(t) = 28 \cdot (1 - \exp(-t \cdot k)) - 18$

$$T(t) = 10 - 28\,e^{-t\,k} \tag{15}$$

la funzione è crescente infatti la sua derivata prima $T'(t) = 28\,k\,e^{-t\,k} \geq 0 \quad \forall t \in R$

verifichiamo se soddisfa la condizione iniziale

$T(0) = 10 - 28\,e^{-0 \cdot k}$

$$T(0) = -18 \tag{16}$$

La condizione iniziale è verificata, occorre verificare anche se sono soddisfatte le condizioni asintotiche finali:

$\lim_{t \to +\infty} (28 \cdot (1 - \exp(-t \cdot k)) - 18) = 10$

valore che **corrisponde** al raggiungimento asintotico della temperatura ambiente (10°). **Funzione adeguata a modellizzare il fenomeno.**

nel terzo caso (esaminato a verifica della correttezza del risultato precedente) si ha

$T(t) = 28 \cdot \exp(-t \cdot k) - 10$

$$T(t) = 28\,e^{-t\,k} - 10 \tag{17}$$

la sua derivata prima rispetto a t è

$T'(t) = -56\,e^{-t\,k} < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ quindi la funzione è **sempre decrescente** e **quindi non adeguata a modellizzare il fenomeno**
perchè la temperatura cresce in un processo di riscaldamento (non occorre verificare le condizioni iniziali e finali asintotiche).

Scelta perciò la funzione $\boldsymbol{T(t) = 10 - 28\,e^{-t\,k}}$
affinchè il blocco non inizi a fondere nei 2 minuti necessari al percorso verso il camion frigorifero, deve essere verificata la condozione

$\boldsymbol{T(2) \geq 0^o}$

$10 - 28\,e^{-t\,k} \geq 0$

$e^{-t\,k} \geq \frac{10}{28}$

$$e^{-t\,k} \leq \frac{5}{14} \tag{18}$$

$e^{-t\,k} \leq \frac{5}{14}$

$$-t \cdot k \leq \ln\left(\frac{5}{14}\right)$$

per t=2

$$k \geq -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{14}\right)$$

$$evalf\left(k \geq -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{14}\right), 2\right)$$

$$0.50 \leq k \tag{19}$$

$k \geq 0.5$

Punto 4

Per risolvere il quesito 4 calcoliamo il volume del recipiente avente la forma di tronco di cono

$$V \approx \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(1.5^2 + 1 + 1.5\right) \cdot 2$$

$$V \approx (3.166666666\,\pi) \tag{20}$$

$$V \approx (9.951) \tag{21}$$

Per calcolare il volume di acqua necessaria per produrre ciascun blocco vale la seguente espressione:

$$V_a + \frac{V_a}{100} \cdot 9.05 = 10$$

$$1.090500000\, V_a = 10 \tag{22}$$

$$V_a = 9.170105456 \tag{23}$$

Poichè $V_a \approx 9.17$ è minore del volume del recipiente $V \approx (9.951)$ quest'ultimo è in grado di contenere l'acqua necessaria a costruire il blocco di ghiaccio.

Poichè il volume del tronco di cono si ottiene con la formula $V = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{Pi} \cdot \left(\mathrm{R}^2 + \mathrm{r}^2 + \mathrm{r} \cdot \mathrm{R}\right) \cdot \mathrm{h}$ per trovare l'altezza raggiunta dall'acqua nel contenitore

si ha $h = \dfrac{V}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\mathrm{R}^2 + \mathrm{r}^2 + \mathrm{r} \cdot \mathrm{R}\right)}$

$$h = \frac{9.17}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(1.5^2 + 1 + 1.5\right)}$$

$$h = \frac{5.791578949}{\pi} \tag{24}$$

$$h = 1.84 \tag{25}$$

L'acqua raggiungerà un'altezza dal fondo pari a 1,84 dm.