Esame di Stato 2016

Problema 1

1

La prima domanda sembra richiedere una soluzione di tipo qualitativo per cui, considerando che il grafico proposto, oltre alle richieste esplicitamente formulate, è simmetrico rispetto all'asse y, presenta per $x=\pm 1$ due semitangenti verticali, (ovvero due punti di non derivabilità della funzione), l'unica funzione plausibile è la prima; verifichiamo formalmente nel punto successivo che solo tale funzione soddisfa, per uno specifico valore del parametro *k*, tutte le condizioni assegnate.

2

La funzione deve soddisfare le condizioni $f(0)=1,\quad f(\pm 1)=0,\quad f'(0^+)\le -\tan 10° \cong -0{,}176$; *f(x)*, presentando un punto angoloso, non è derivabile in 0.

Osserviamo preliminarmente che le tre funzioni assegnate sono pari, per cui possono essere studiate solo per $x\ge 0$, cosa che faremo nel seguito, omettendo il valore assoluto; inoltre tutte soddisfano la condizione $f(0)=1$.

Eliminiamo subito la terza funzione in quanto $f'(x)=-k\dfrac{\pi}{2}x^{k-1}sen\left(\dfrac{\pi}{2}x^k\right)\Rightarrow f'(0)=0$.

Per la seconda funzione si ha: $f(1)=9(k-1)=0\quad\Rightarrow\quad k=1$; da cui:

$$f'(x)=-18x^2+18x-4\quad\Rightarrow\quad f'(0)=-4\quad accettabile$$

Il volume del solido si calcola tramite l'integrale:

$V=2L\int_0^1 f(x)\,dx=16\int_0^1\left(-6x^3+9x^2-4x+1\right)dx=8$ (m³) minore del volume richiesto; è preferibile lasciare sottintesa l'unità di misura, in quanto non coerente con le equazioni formulate dal testo.

Per la terza funzione si ha:

$$f(1)=0;\quad f'(x)=-\frac{1}{k}(1-x)^{\frac{1}{k}-1}\quad\Rightarrow\quad f'(0)=-\frac{1}{k}<-\tan 10°\quad\Rightarrow\quad k<\frac{1}{\tan 10°}\cong 5{,}67\quad\Rightarrow\quad k\le 5$$

e

$V=16\int_0^1(1-x)^{\frac{1}{k}}\,dx=\left|-\dfrac{16k}{k+1}(1-x)^{\frac{k+1}{k}}\right|_0^1=\dfrac{16k}{k+1}\ge 13\quad\Rightarrow\quad k>\dfrac{13}{3}$ che, combinata con la precedente, impone *k = 5*, il volume del solido risulta conseguentemente $V=\dfrac{40}{3}>13$.

La funzione richiesta è pertanto: $f(x)=\left(1-|x|\right)^{\frac{1}{5}}$; osserviamo inoltre che $f'(x)=\frac{1}{5}\left(1-|x|\right)^{\frac{-4}{5}}\cdot\operatorname{sgn}(x)$[1],

per cui la funzione non è derivabile in $x=\pm1$ e $\lim_{x\to 1^-} f'(x)=-\infty$ $\left(\lim_{x\to -1^+} f'(x)=+\infty\right)$ ovvero la

funzione ammette per $x=\pm1$ due semitangenti verticali, come appare dal grafico fornito.

3

Come già detto, la parità della funzione ci consente di studiarla nell'intervallo [0; 1], dove risulta invertibile; in tale restrizione si ha pertanto:

$$y=f_1(x)=(1-x)^{\frac{1}{5}} \quad \Rightarrow \quad x=1-y^5$$

,

$$V(z)=\frac{V_{liquido}}{V_{totale}}=\frac{2L\int_0^z\left(1-y^5\right)dy}{\frac{40}{3}}=\frac{6}{5}\left|z-\frac{z^6}{6}\right|_0^y=\frac{1}{5}z\left(6-z^5\right)$$

È utile, anche se non necessario, verificare che $V(0)=0;\quad V\left(\frac{1}{2}\right)=0,597;\quad V(1)=1$

4

L'obiezione dell'amministratore consiste nel supporre una proporzionalità tra livello e volume del liquido, ma ciò è possibile solo per un serbatoio a sezione costante.

Il massimo scostamento dall'andamento lineare si determina massimizzando la funzione:

$$D(y)=\left|V(z)-z\right|=\left|\frac{1}{5}z\left(6-z^5\right)-z\right|=\frac{1}{5}\left|z-z^6\right|=\frac{1}{5}z\left(1-z^5\right) \qquad z\in[0;1]$$

Il modulo è stato eliminato dall'ultima equazione in quanto l'espressione ottenuta non è mai negativa nell'intervallo di definizione; inoltre $D(0)=D(1)=0$, per cui la funzione ammette un massimo derivabile interno all'intervallo di definizione:

$D'(z)=\frac{1}{5}\left(1-6z^5\right)=0$ per $z=\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$, in tale punto si ha il massimo scostamento dalla linearità, che vale:

$$D\left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right)=\frac{1}{6\sqrt[5]{6}}\cong 0,116=11,6\%.$$

Si rileva l'assoluta inutilità della pseudocontestualizzazione iniziale, che mira a trasformare un significativo problema geometrico in un gioco di ruolo.

---

[1] $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & se\ x>0\\ -1 & se\ x<0\end{cases}$

Problema 2

Punti 1, 2

Il grafico di ***y = f'(x)*** passa per i punti:

B'(1;0): la derivata si annulla in quanto f(x) ha massimo in B (1;0);

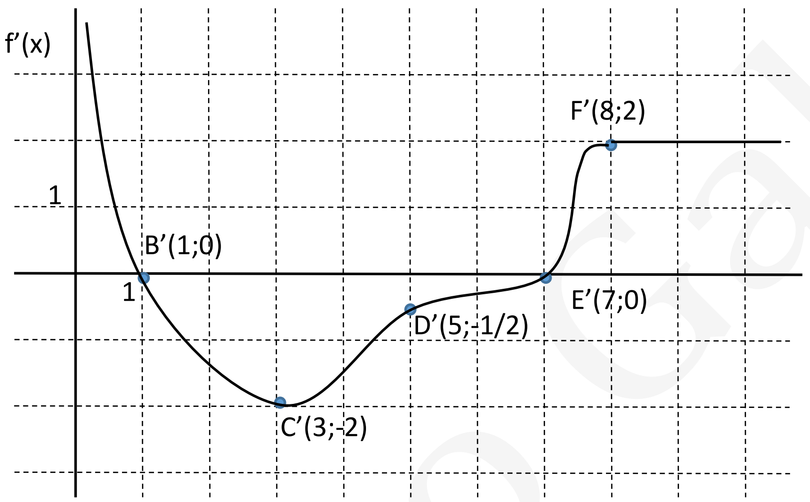
C'(3;-2), dove ha un minimo: C è infatti un punto di flesso con tangente inflessionale di pendenza -2;

D'(5;-1/2): la tangente in D ha pendenza -1/2;

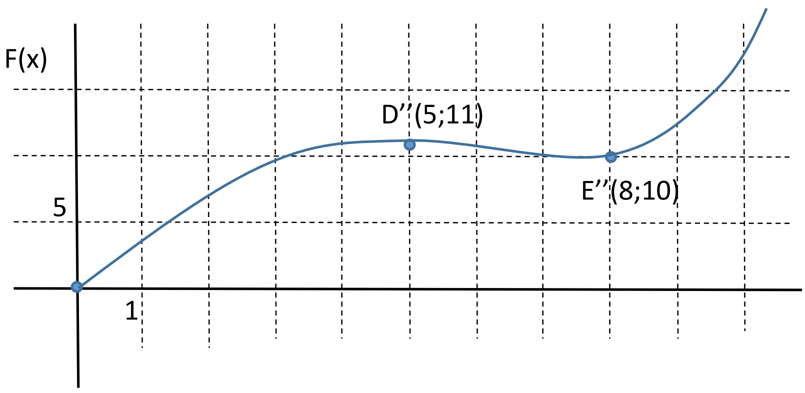
E'(7;0): f(x) ha minimo in E (7;-3/4);

F'(8;2); per x ≥8 il grafico è la retta y=2, deducibile dalla pendenza della retta FG: $m_{FG} = \dfrac{4-0}{10-8} = 2$;

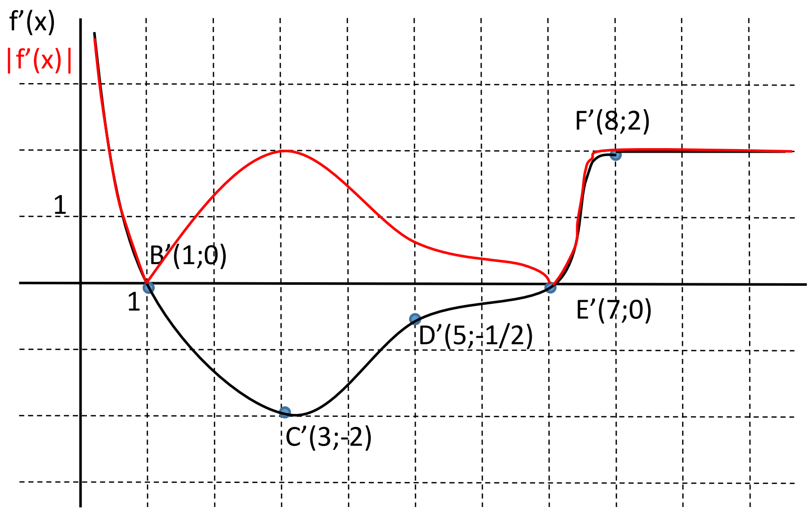
la retta x=0 è asintoto verticale (Γ è tangente all'asse y)



F(x), definita in $[0;+\infty[$, passa per i punti (0;0), D''(5;11), dove ha un massimo locale, F''(8;10), dove ha un minimo locale, quindi cresce asintoticamente con andamento quadratico; il suo grafico qualitativo è riportato nella figura a fianco, nella quale è stata cambiata la scala verticale per esigenze di leggibilità e spazio.



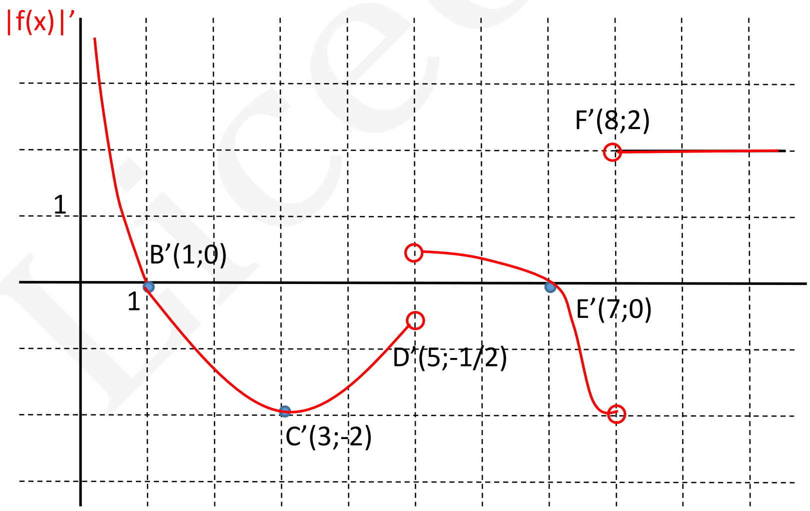
Il grafico di **y = |*f'(x)*|** (riportato in rosso nella figura successiva) è costituito dai punti della funzione y = f'(x) che giacciono nel primo quadrante e dal ribaltamento attorno all'asse x dei punti situati al di sotto dell'asse stesso; |f'(x)| è definita in]0; +∞[



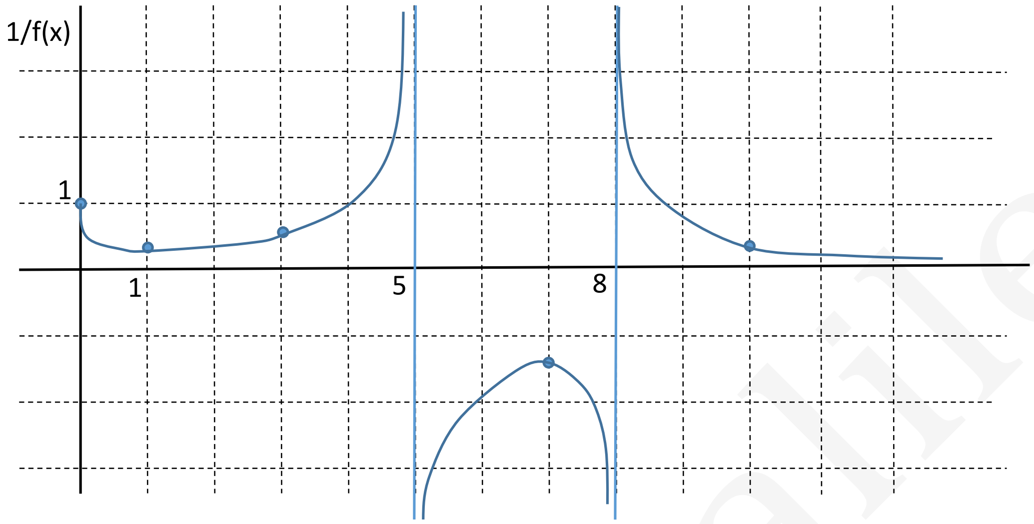
Per ottenere il grafico di y = |f(x)|', partiamo dal grafico di y = |f(x)|; essendo:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le 5 \cup x \ge 8 \\ -f(x) & 5 < x < 8 \end{cases} \quad \text{si ha} \quad |f(x)|' = \begin{cases} f'(x) & 0 < x < 5 \cup x > 8 \\ -f(x) & 5 < x < 8 \end{cases}$$

y = |f(x)|' è definita in $]0;5[\cup]5;8[\cup]8;+\infty[$; nei punti (5;0) e (8;0) |f(x)| presenta un punto angoloso, quindi non esiste |f(x)|'.



La funzione $y = \frac{1}{f(x)}$ è definita in $[0;5[\cup]5;8[\cup]8;+\infty[$; presenta due asintoti verticali di equazione $x = 5$ e $x = 8$, e l'asintoto orizzontale destro $y = 0$; inoltre, essendo $y' = \frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, l'andamento di monotonia è opposto a quello di *y = f(x);* la funzione non è derivabile in 0 (grafico tangente all'asse *y*).



3

$$\overline{f}_{[0;8]} = \frac{1}{8}\int_0^8 f(x)\,dx = \frac{11-1}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\overline{|f|}_{[0;8]} = \frac{1}{8}\int_0^8 |f(x)|\,dx = \frac{1}{8}\left(\int_0^5 f(x)\,dx - \int_5^8 f(x)\,dx\right) = \frac{11+1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\overline{f'}_{[1;7]} = \frac{1}{6}\int_1^7 f'(x)\,dx = \frac{1}{6}\left[f(7) - f(1)\right] = \frac{-\frac{3}{4}-4}{6} = -\frac{19}{24}$$

Per l'ultima richiesta, ricaviamo preliminarmente l'espressione della funzione ***y = F(x)*** nell'intervallo [9;10]; la funzione ***y=f(x)*** in tale intervallo è la retta di pendenza 2 passante per (8;0), ovvero

$$y = f(x) = 2x - 16 \qquad x \in [8;+\infty[$$

$$F(x) = 10 + \int_8^x (2x-16)\,dx = x^2 - 16x + 74 \qquad x \in [8;+\infty[$$

$$\overline{F}_{[9;10]} = \int_9^{10} \left(x^2 - 16x + 74\right) dx = \left|\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 74x\right|_9^{10} = \frac{37}{3}$$

4

$$F(0) = 0 \qquad F'(0) = f(0) = 1 \;\Rightarrow\; \text{retta tangente: } y - F(0) = F'(0)(x-0) \;\Rightarrow\; y = x$$

$F(8)=10 \qquad F'(8)=f(8)=0 \quad \Rightarrow$ retta tangente: $y-F(8)=F'(8)(x-8) \quad \Rightarrow \quad y=10$

QUESTIONARIO

1

La funzione $f(x)=e^{-x^2}$ è pari, per cui $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cong 0,886 < 1$ per cui $\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}dx = 1$ per un numero *u* positivo.

$A=\int_{-u}^{u} x^7 e^{-x^2}dx = 0$ perché integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'asse y

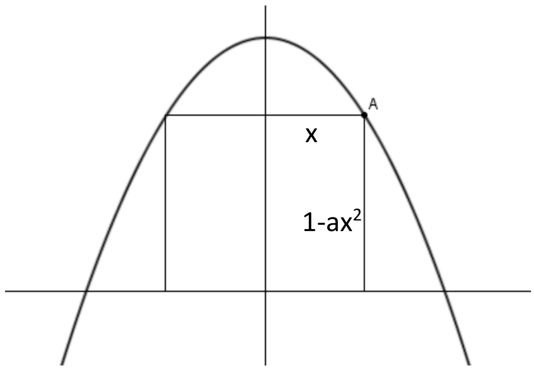
$$B=\int_{-u}^{u} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{u} e^{-x^2}dx = 2\left(\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}dx - \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx\right) = 2\left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = 2-\sqrt{\pi} \text{ ,}$$

$C=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}dx$ mediante il cambio di variabile $t=x\sqrt{5}$, con $dx=\frac{dt}{\sqrt{5}}$, si ottiene:

$$C=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{5}}$$

2

Sia $A\left(x;1-ax^2\right)$, con $0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{a}}$ un punto appartenente all'arco di parabola che giace nel primo quadrante.



La superficie e il perimetro del rettangolo inscritto valgono rispettivamente

$S=2x\left(1-ax^2\right)$ e $P=2\left(2x+1-ax^2\right)$.

Derivando le due funzioni si ha:

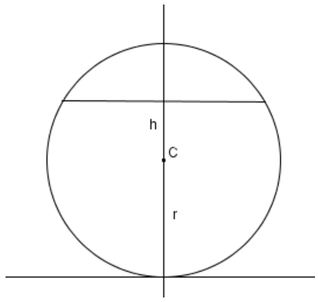
$S'=2\left(1-3ax^2\right)$, massimo per $x=\frac{1}{\sqrt{3a}}$

(*S(x)* è derivabile, si annulla negli estremi dell'intervallo ed è positiva per valori interni, quindi ammette un punto di massimo stazionario interno all'intervallo di definizione).

$P'=4\left(1-ax\right)$, massimo per $x=\frac{1}{a}$ (*P(x)* è una parabola con concavità verso il basso).

Imponendo che il massimo sia comune, si ha $\frac{1}{\sqrt{3a}}=\frac{1}{a}$, che ha come soluzione a = 3.

3



Riferita ad un opportuno sistema di riferimento (v. figura), l'equazione della circonferenza di raggio r e centro (0; r) è $x^2+(y-r)^2=r^2$; esplicitandola per *x* e considerando la sola soluzione positiva, si ottiene la funzione $x=f(y)=\sqrt{r^2-(y-r)^2}=\sqrt{2ry-y^2}$, che individua la semicirconferenza situata nel semipiano x ≥0.

Il volume richiesto è dato dalla rotazione completa del segmento circolare di altezza h attorno all'asse y:

$$V(h)=\pi\int_0^h f^2(y)\,dy=\pi\int_0^h\left(2ry-y^2\right)dy=\pi\left(rh^2-\frac{h^3}{3}\right)$$

4

Si tratta di una distribuzione binomiale con $p=\frac{1}{4},\ q=\frac{3}{4}$ (*p* = probabilità di rispondere esattamente).

La probabilità di superare il test è data da:

$$P(risp\geq 8)=\binom{10}{8}p^8q^2+\binom{10}{9}p^9q\ +\binom{10}{10}p^{10}=4,2\cdot 10^{-4}$$

5

Il raggio della sfera è dato dalla distanza tra centro e piano tangente:

$$r=\frac{\left|2\cdot(-2)-2\cdot(-1)+2-9\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3$$

Il punto di tangenza è dato dall'intersezione tra il piano assegnato e la retta ad essa ortogonale, il cui vettore direzione è (2; -2; 1), passante per il punto; l'equazione parametrica di tale retta è:

$$\begin{cases} x=2t-2 \\ y=-2t-1 \\ z=t+2 \end{cases}$$

che, sostituita nell'equazione del piano, fornisce:

$2(2t-2)-2(-2t-1)+t+2-9=0 \quad\Rightarrow\quad t=1$ da cui il punto di tangenza ha coordinate (0; -3; 3).

6

Il polinomio nullo $P_0(x)$ =0 non soddisfa banalmente la condizione richiesta; per qualunque polinomio non nullo *P(x)* si ha $\lim_{x\to+\infty}\left|P(x)\right|=+\infty$, per cui, fissato ad es. $M=2,\quad \exists k\mid\forall x>k\quad\Rightarrow\quad\left|P(x)\right|>2$; in tale intervallo si ha

$$\left|P(x)\right|+1\geq\left|P(x)-\cos x\right|\geq\left|P(x)\right|-1>1$$

quindi l'affermazione è falsa.

7

Indichiamo con *s* e *d* gli spostamenti della pedina rispettivamente nella casella sopra o a destra; per raggiungere la casella A sono necessari 14 spostamenti, di cui 7 a destra e 7 in alto, in un ordine qualunque, ovvero una sequenza (ssds….) di 14 lettere di cui 7 *s* e 7 *d*; si hanno pertanto $\binom{14}{7}=\frac{14!}{7!7!}$ percorsi; in modo analogo, per andare dal punto di partenza a B servono 3 spostamenti a destra e 5 in alto, per cui si hanno $\binom{8}{3}$ percorsi, mentre per andare da B ad A sono necessari 4 spostamenti a destra e 2 in alto, ovvero $\binom{6}{2}$ percorsi; la probabilità che un percorso passi per B è pertanto:

$$P_B=\frac{\binom{8}{3}\cdot\binom{6}{4}}{\binom{14}{7}}=\frac{35}{143}\cong 0,245$$

8

Notiamo che $\int x^2e^x dx = x^2e^x-\int 2x\,e^x dx$ per cui:

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(2xe^x+x^2e^x\right)dx=\int 2x\,e^x dx+x^2e^x-\int 2x\,e^x dx=x^2e^x+c \quad\Rightarrow\quad 2e=e+c \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad c=e$$

La primitiva cercata è pertanto $F(x)=\int f(x)\,dx=x^2e^x+e$

9

Dato il piano generico nello spazio, $ax+by+cz+d=0$, il suo vettore direzione $\vec{v}=(a;b;c)$ deve essere ortogonale ai vettori direzione delle due rette; quello della prima è $\vec{u}=(1;2;1)$; esprimendo la seconda in forma parametrica si ha:

$$\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=-3t+3\end{cases}\qquad \text{da cui si ricava il vettore direzione } \vec{w}=(1;2;-3)$$

Imponendo quindi $\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=a+2b+c=0\\\vec{w}\cdot\vec{v}=a+2b-3c=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}c=0\\a=-2b\end{cases}$ da cui si ricava $\vec{v}=(-2;1;0)$

Il fascio di piani paralleli alle due rette ha pertanto equazione: $-2x+y+d=0$;imponendo il passaggio per $P=(1;0;-2)$ si ottiene *d* = 2, da cui il piano richiesto è $-2x+y+2=0$.

10

Si ha:

$f\left(\sqrt{e}\right)=\int_e^e \frac{t}{\ln t}\,dt=0$ e

$f'(x)=2x\frac{x^2}{\ln x^2}=\frac{x^3}{\ln x}$, da cui $f'\left(\sqrt{e}\right)=2e\sqrt{e}$, per cui la tangente richiesta ha equazione

$$y=2e\sqrt{e}\left(x-\sqrt{e}\right)\quad\Rightarrow\quad y=2e\sqrt{e}\;x-2e^2$$

La derivata *f'(x)* può essere ottenuta o tramite il teorema della funzione composta, come suggerito dal calcolo proposto, oppure utilizzando la definizione:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\int_e^{(x+h)^2}\frac{t}{\ln t}\,dt-\int_e^{x^2}\frac{t}{\ln t}\,dt\right)=\lim_{h\to 0}\int_{x^2}^{(x+h)^2}\frac{t}{\ln t}\,dt=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\cdot\frac{z}{\ln z}=2x\frac{x^2}{\ln x^2}=\frac{x^3}{\ln x}$$

dove $x^2<z<(x+h)^2$