Esame di Stato 2019 Sessione suppletiva – Matematica-Fisica

Problema 1

1

$f_a(x)$ è continua per x ≠ 0, perché composizione di funzioni continue; il limite in 0 fornisce

$$\lim_{x\to0^-} f_a(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{9a}{4(x-1)^4} = \frac{9}{4}a \quad \text{e} \quad \lim_{x\to0^+} f_a(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{9}{2}\left(1+xe^{a-x}\right) = \frac{9}{2}$$

La funzione è continua in 0 solo se $\lim_{x\to0^-} f_a(x) = \lim_{x\to0^+} f_a(x)$, ovvero se $\frac{9}{4}a = \frac{9}{2}$, quindi solo per *a =2*.

Segno:

per x < 0 $\operatorname{sgn} f_a(x) = \operatorname{sgn}(a)$

per x ≥ 0 $f_a(x) > 0$ perché nella parentesi figura la somma di 1 con un termine non negativo.

$$f_a'(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}e^{a-x}(1-x) & x>0 \\ -\frac{9a}{(x-1)^5} & x<0 \end{cases}$$

Per x >0, $f_a'(1)=0 \quad f_a'(x)>0$ per x < 1, per cui *$f_a(x)$* ammette massimo in 1 $\forall a \in \mathbb{R}$.

2

Posto a = 2, si ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}\left(1+xe^{2-x}\right) & x\ge0 \\ \frac{9}{2(x-1)^4} & x<0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}e^{2-x}(1-x) & x>0 \\ -\frac{18}{(x-1)^5} & x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{-18}{(x-1)^5} = 18 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{9}{2}e^{2-x}(1-x) = \frac{9}{2}e^2$$

pertanto $f(x)$ non è derivabile in 0, dove presenta un punto angoloso.

Il massimo ha coordinate $M\left(1;\frac{9}{2}(1+e)\right)$

Proseguendo con lo studio di funzione si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{9}{2(x-1)^4} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{9}{2}\left(1+xe^{2-x}\right) = \left(\frac{9}{2}\right)^+$$

Per cui $f(x)$ presenta asintoto orizzontale sinistro di equazione $y=0$ e asintoto orizzontale destro di equazione $y=\frac{9}{2}$.

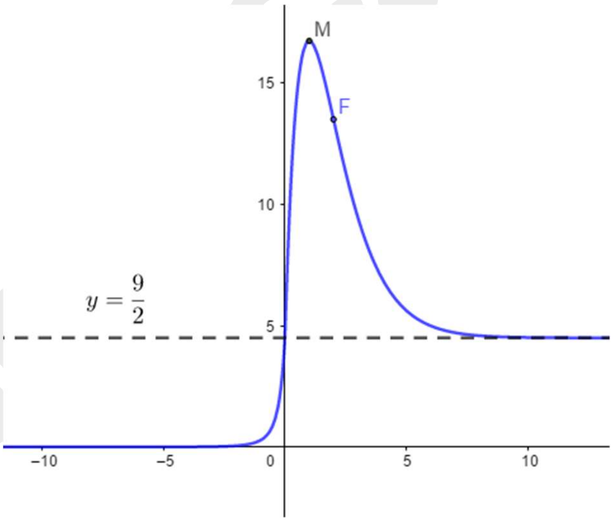
Le semitangenti nel punto di ascissa 0 formano un angolo di ampiezza

$$\alpha = 180° - \arctan \frac{\frac{9}{2}e^2 - 18}{1+18\left(\frac{9}{2}e^2\right)} = 178{,}5^\circ$$

Per lo studio dei flessi deriviamo una seconda volta $f(x)$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}e^{2-x}(x-2) & x>0 \\ \frac{90}{(x-1)^6} & x<0 \end{cases}$$

Essendo $f''(x)>0$ per x >2, $f(x)$ presenta un unico flesso nel punto di coordinate $F\left(2;\frac{27}{2}\right)$; il grafico della funzione è pertanto il seguente



$$g(3-x) = h\left[1+\left(3-k(3-x)\right)e^{k(3-x)-1}\right] = h\left[1+\left(3-3k+kx\right)e^{3k-1-kx}\right]$$

Perché sia: $h\left[1+(3-3k+kx)e^{3k-1-kx}\right]=\frac{9}{2}\left(1+xe^{2-x}\right)$ si deve avere:

$$h=\frac{9}{2},\quad k=1$$

3

I protoni all'interno del campo magnetico risentono la fora di Lorentz, di intensità $F=evB$, costante in modulo e ortogonale alla traiettoria, pertanto descrivono una circonferenza il cui raggio si determina uguagliando la forza di Lorentz alla forza centripeta richiesta dal moto circolare:

$evB=\frac{m_p v^2}{r}$, ovvero

$$r=\frac{m_p v}{eB}=\frac{\sqrt{2m_p E}}{eB}=\frac{\sqrt{2\cdot 1,673\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\cdot 42\,\mathrm{MeV}\,\frac{1,602\cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{MeV}}}}{1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 0,24\,\mathrm{T}}=3,9\,\mathrm{m}$$

4

Si ha: $d\varepsilon=-g(x)\,dx=-\frac{9}{2}\left(1+(3-x)e^{x-1}\right)dx$

L'energia assorbita dall'acqua nei primi 3 cm di cammino risulta pertanto

$$\varepsilon_{ass}=\int_0^3 -g(x)\,dx=\int_0^3 -\frac{9}{2}\left[1+(3-x)e^{x-1}\right]dx=-\frac{9}{2}\left|x+3e^{x-1}-xe^{x-1}+e^{x-1}\right|_0^3=$$

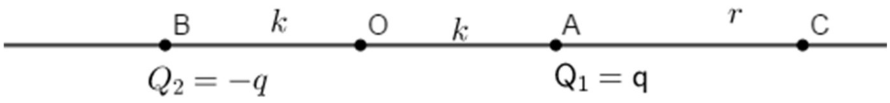
$$=-\frac{9}{2}\left|x+(4-x)e^{x-1}\right|_0^3=-\frac{9}{2}\left(3+e^2-\frac{4}{e}\right)\approx -40\,\mathrm{MeV}$$

Nel calcolo si è utilizzata l'integrazione per parti

$$\int xe^{x-1}dx=xe^{x-1}-\int e^{x-1}dx=(x-1)e^{x-1}+c$$

Problema 2

1



Si consideri il sistema di cariche come in figura, dove si è indicato con O il punto medio del segmento AB, con r la distanza del generico punto C da O. il campo in C è la sovrapposizione del campo uscente della carica q e del campo entrante della carica – q, pertanto il campo risultante è diretto verso destra nei punti esterni al segmento AB, verso sinistra nei punti interni; il campo non è definito in A e in B.

Per la simmetria delle cariche, il campo assume la stessa intensità in punti della retta AB simmetrici rispetto a O, pertanto:

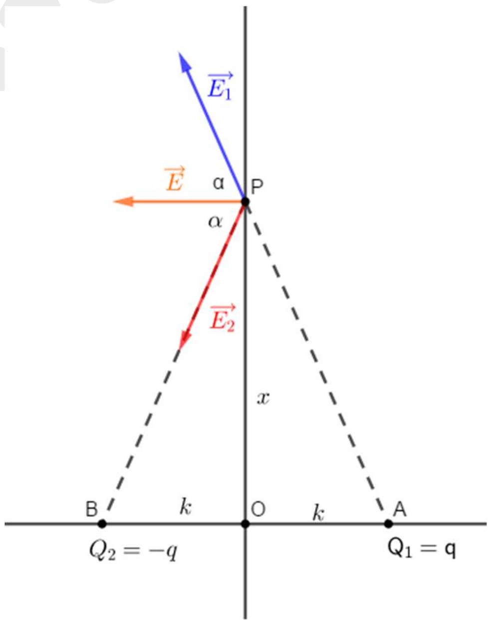
$$E(r)=\begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{(r-k)^2}-\dfrac{q}{(r+k)^2}\right) & r>k \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left|-\dfrac{q}{(r-k)^2}-\dfrac{q}{(r+k)^2}\right|=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{(r-k)^2}+\dfrac{q}{(r+k)^2}\right) & 0\le r<k \end{cases}$$

Il campo non si annulla mai in quanto:

nel segmento AB i due campi generatori hanno lo stesso verso;

esternamente al segmento AB i due campi hanno verso opposto ma non hanno mai la stessa intensità, essendo prodotti da cariche di modulo uguale ma poste a diversa distanza dal punto considerato.

2



Il campo risultante nel punto P sull'asse del segmento AB è parallelo al segmento AB (quindi orizzontale nel riferimento in figura; il suo modulo è dato dalla somma delle componenti orizzontali dei due campi, ovvero

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} \quad \text{e} \quad E = 2E_1 \cos\alpha$$

All'aumentare della distanza di P dal punto medio AB diminuiscono sia l'intensità dei singoli campi $\vec{E_1}$ e $\vec{E_2}$ sia il coseno dell'angolo che tali vettori formano con la direzione orizzontale; l'intensità del campo in P è data da:

$$E = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\left(x^2+k^2\right)}\cos\alpha = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2+k^2\right)}\cdot\frac{k}{\sqrt{x^2+k^2}} = \frac{kq}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

3

Sia

$$f(x) = \frac{h}{\left(x^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$f(x)$ è definita e continua in $\mathbb{R}$;

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = f(-x)$: funzione pari

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = 0^+$

Derivando la funzione si ottiene:

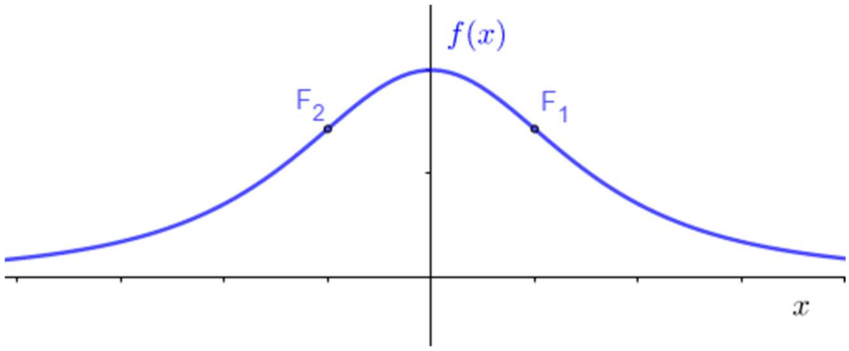
$$f(x) = -\frac{3hx}{\left(x^2+k^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$f(x) > 0$ per $x > 0$, quindi il punto di coordinate $\left(0;\frac{h}{k^3}\right)$ punto di massimo relativo e assoluto.

$$f''(x) = \frac{3h\left(4x^2-k^2\right)}{\left(x^2+k^2\right)^{\frac{7}{2}}}$$

$f''(x) > 0$ per $x < -\frac{k}{2} \cup x > \frac{k}{2}$

La funzione presenta punti di flesso di coordinate $F_{1,2} = \left(\mp\frac{k}{2};\frac{8h\sqrt{5}}{25k^3}\right)$. Il grafico è il seguente



4

Derivando la funzione $g(x)$ si ottiene:

$$g'(x)=b\frac{\left(x^2+k^2\right)^a-2ax^2\left(x^2+k^2\right)^{a-1}}{\left(x^2+k^2\right)^{2a}}=b\frac{\left(x^2+k^2\right)^{a-1}}{\left(x^2+k^2\right)^{2a}}\left(x^2+k^2-2ax^2\right)=b\frac{k^2+(1-2a)x^2}{\left(x^2+k^2\right)^{a+1}}$$

da cui

$$g'(x)=f(x) \quad \text{se}$$

$$a=\frac{1}{2}, \quad b=\frac{h}{k^2}$$

Per $h=k^2$ si ha:

$$f(x)=\frac{k^2}{\left(x^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{x}{\left(x^2+k^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

per cui:

$$f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[0,+\infty[$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=\left|g(x)\right|_0^{+\infty}=\left|\frac{x}{\left(x^2+k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right|_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(x^2+k^2\right)^{\frac{1}{2}}}=1$$

Quindi $f(x)$ è una densità di probabilità.

Il valore medio risulta

$$x_m=\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{k^2x}{\left(x^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\frac{k^2}{2}\int_0^{+\infty}2x\left(x^2+k^2\right)^{-\frac{3}{2}}\,dx=-k^2\left|\left(x^2+k^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right|_0^{+\infty}=k$$

Per la mediana si ha

$$\int_0^{M} f(x)\,dx=\left|g(x)\right|_0^{M}=\left|\frac{x}{\left(x^2+k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right|_0^{M}=\frac{M}{\left(M^2+k^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}$$

da cui segue

$$4M^2=M^2+k^2 \quad \text{e infine} \qquad M=\frac{k}{\sqrt{3}}$$

QUESITI

1

Effettuiamo preliminarmente il cambiamento di base del logaritmo:

$$\log_x\left(x^a+x^b\right)=\frac{\ln\left(x^a+x^b\right)}{\ln x}$$

Se $a = b$ si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^a+x^b\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2x^a\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln 2}{\ln x}+a\frac{\ln x}{\ln x}\right]=a$$

Se $a > b$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^a+x^b\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[x^a\left(1+\frac{x^b}{x^a}\right)\right]}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^a}{\ln x}=a$$

2

$f'(x)=e^{x^2}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, quindi la funzione è crescente

$$f(1)=\int_1^1 e^{t^2}\,dt=0$$

Per cui

$f(x)>0$ per $x>1$

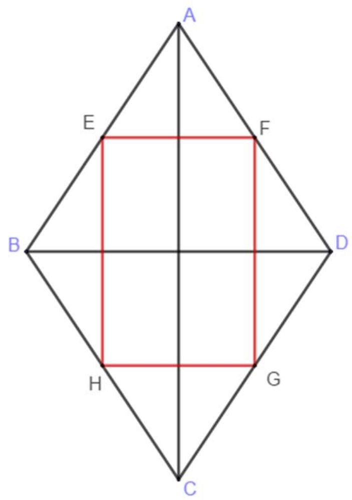
$$\int_0^1\frac{f''(x)}{f'(x)}dx=\left|\ln f'(x)\right|_0^1=\left|e^{x^2}\right|_0^1=e-1$$

3

Sia ABCD il rombo, EFGH il quadrilatero ottenuto congiungendo i punti medi dei lati.

I punti E e F e i punti G e H sono simmetrici rispetto alla retta AC (diagonale del rombo); analogamente i punti E e H, F e G sono simmetrici rispetto alla retta BD.

Il quadrilatero EFGH ha due assi di simmetria ortogonali, che sono assi dei suoi lati, quindi è un rettangolo



4

Si ha:

$$\overline{OA}=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2+(z_A-z_O)^2}=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$$

Analogamente

$$\overline{OB}=\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}=7$$

$$\overline{OC}=\sqrt{3^2+(-6)^2+2^2}=7$$

Per cui i tre spigoli hanno la stessa lunghezza; verifichiamo che sono ortogonali eseguendo il prodotto scalare due a due:

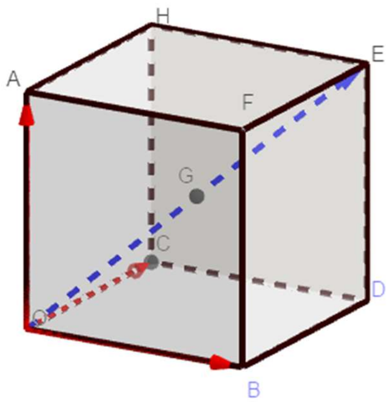
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(2,3,6)(6,2,-3)=0$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=(2,3,6)(3,-6,2)=0$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=(3,-6,2)(6,2,-3)=0$$

segue che i tre segmenti sono spigoli di un cubo.

Sommando i tre vettori $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ si ottiene il vettore che congiunge O al suo estremo opposto E, ovvero $\overrightarrow{OE}$ è una diagonale del cubo, e il suo punto medio, G, è il centro della sfera ad esso circoscritta.



$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[(2,3,6)+(6,2,-3)+(3,-6,2)\right]=\left(\frac{11}{2},-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$$

Il raggio è dato dalla lunghezza della semidiagonale:

$$r=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OA}=\frac{7}{2}\sqrt{3}$$

5

Sia n = 1, 2, …,6

Viene trascritto il numero n se esce n su entrambi i dadi (una possibilità) oppure il numero n su uno dei due dadi e uno qualunque degli *(n-1)* numero più piccoli sull'altro dado: $2(n-1)$ possibilità.

Il numero di casi favorevoli alla trascrizione del numero n è pertanto dato da:

$$N_{favorevoli,n}=2(n-1)+1=2n-1$$

Il numero di casi possibili è 6^2 =36, per cui le probabilità delle singole uscite sono:

$$P(1)=\frac{1}{36},\ P(2)=\frac{3}{36},\ P(3)=\frac{5}{36},\ P(4)=\frac{7}{36},\ P(5)=\frac{9}{36},\ P(6)=\frac{11}{36}$$

Il valore medio è dato da:

$$m=\sum_{n=1}^{6} nP(n)=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+6\cdot\frac{11}{36}=4,47$$

6

Solo il lato *b* subisce la contrazione di Lorentz, per cui:

$$V=ahb\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=V_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=40\,\mathrm{cm}\cdot 20\,\mathrm{cm}\cdot 50\,\mathrm{cm}\cdot\sqrt{1-0,90^2}=1,7\cdot 10^4\ \mathrm{cm}^3$$

La velocità della scatola nel riferimento terrestre è data da:

$$v'=\frac{v+v_s}{1+\frac{vv_s}{c^2}}=\frac{0,90\,c+0,50\,c}{1+\frac{0,90\cdot 0,50\,c^2}{c^2}}=0,97c$$

7

La bobina, entrando nella regione ove è presente un campo magnetico, è esposta ad una variazione di flusso che determina la comparsa di una forza elettromotrice indotta e, conseguentemente, di una corrente indotta; poiché la bobina ha una resistenza finita, la corrente dissipa energia. La potenza dissipata è fornita dalla fora esterna necessaria a mantenere costante la velocità della bobina.

Indicando con x la parte di spira interna al campo magnetico, si ha:

$$i=\begin{cases}-\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\Phi\left(\vec{B}\right)=-\frac{1}{R}\frac{d\left(NBlx\right)}{dt}=-\frac{NBl}{R}v & 0\le t\le\frac{l}{v}\\ 0 & t>\frac{l}{v}\end{cases}$$

Per cui la potenza dissipata risulta:

$$P=Ri^2=\begin{cases}\frac{\left(NBlv\right)^2}{R} & 0\le t\le\frac{l}{v}\\ 0 & t>\frac{l}{v}\end{cases}$$

Se il carrello viene lanciato verso il campo magnetico l’interazione tra la corrente indotta e il campo esterno determina una forza che lo rallenta; conseguentemente diminuiscono la corrente indotta e la potenza dissipata.

Sono possibili varie situazioni:

a) il passaggio di corrente dissipa tutta l’energia cinetica del carrello prima che questo sia entrato completamente nel campo: il carrello si ferma parzialmente all’interno del campo e cessano i fenomeni indotti

b) il carrello riesce ad entrare completamente nel campo: il carrello continua a muoversi con velocità costante con energia corrispondente alla differenza tra l'energia iniziale e quella dissipata per effetto Joule, finché comincia ad uscire dal campo magnetico; a questo punto risente una forza elettromotrice indotta che lo rallenta ulteriormente fino a

b') fermarsi parzialmente all'interno del campo, oppure

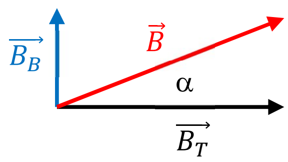
b'') uscire dalla parte destra e proseguire il moto uniforme con l'energia residua all'esterno del campo.

8

Quando nella bobina viene fatta circolare corrente l'ago, inizialmente orientato nella direzione del campo magnetico terrestre, raggiunge una nuova posizione di equilibrio allineandosi al campo risultante, somma vettoriale del campo terrestre ($\overrightarrow{B_T}$) e di quello al centro della bobina $\overrightarrow{B_B}$, perpendicolare al piano della bobina stessa.

Si ha:

$$\tan\alpha = \frac{B_B}{B_T} = \frac{N\mu_0 I}{2RB_T} \quad \text{da cui}$$



$$B_T = \frac{N\mu_0 I}{2R\tan\alpha} = \frac{130\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Tm/A}}{2\cdot 0{,}15\ \text{m}}\frac{I}{\tan\alpha} = 5{,}45\cdot 10^{-4}\ \text{T/A}\,\frac{I}{\tan\alpha}$$

Si ottiene

α (°)	B_T (mT)
10	0,0352
20	0,0349
30	0,0347
40	0,0340
50	0,0338

che fornisce come valore attendibile, B_T = 0,0345 mT

Assumiamo come incertezza la deviazione standard del campione diviso la radice quadrata del numero di misure:

$$\Delta B_T = \frac{\sigma_{B_T}}{\sqrt{n}} = 0{,}00027\ \text{mT}$$

pertanto

$$B_T = (0{,}0345 \pm 0{,}0003)\ \text{mT}$$