

Problema 1

■

$f(x)$ è continua e derivabile per $x \neq 1$; verifichiamo l'andamento in $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} kx = k \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{k}{x^2} = k$$

La funzione è continua per $x=1$ per ogni valore di k , pertanto è continua nel suo campo di esistenza.

$$f'(x) = \begin{cases} k & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{2k}{x^3} & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} k = k \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{2k}{x^3} \right) = -2k$$

Essendo $-2k \neq k$ per $k \neq 0$ $f(x)$ non è derivabile nel punto $x = 1$, dove si ha un punto angoloso.

Relativamente all'andamento della funzione è immediato verificare che:

$$f(0) = 0 \quad f(x) > 0 \quad \forall x > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x^2} = 0^+$$

$$f'(x) > 0 \text{ per } 0 \leq x < 1 \quad f'(x) < 0 \text{ per } x > 1$$

Il punto di coordinate $(1; k)$ è pertanto massimo assoluto di $f(x)$.

Imponiamo la condizione sull'angolo tra le semitangenti nel punto di ascissa 1

$$\tan \gamma = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \frac{k - (-2k)}{1 + k(-2k)} = \frac{3k}{1 - 2k^2} = 3$$

da cui si ottiene l'equazione risolvente $2k^2 + k - 1 = 0$ che ammette come soluzioni $k = \frac{1}{2}$ e $k = -1$ (non accettabile).

■

Posto $k=1$ si ha:

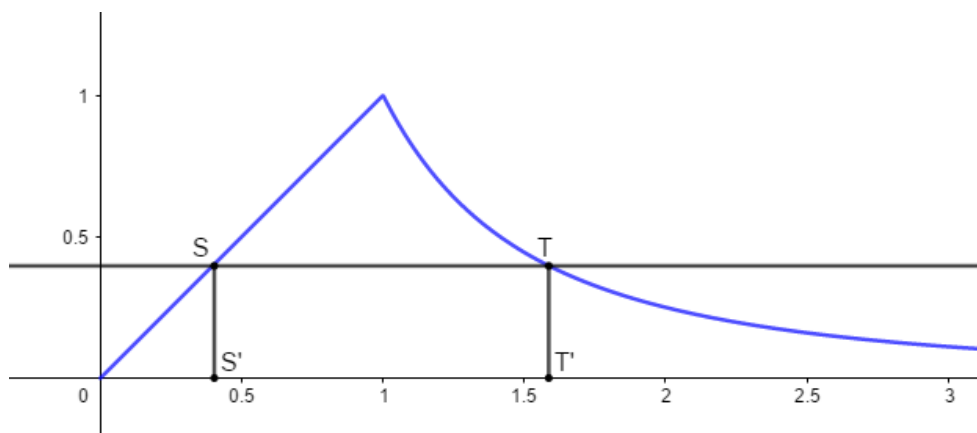
$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$$

La retta $y = t$ interseca il grafico nei punti

$$S(t; t) \text{ e } T\left(\frac{1}{\sqrt{t}}; t\right)$$

L'area del rettangolo $SS'T'T$ è espressa dalla relazione:

$$A(t) = \overline{ST} \cdot \overline{TT'} = \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - t \right) t = \sqrt{t} - t^2$$



Osserviamo che $A(0) = A(1) = 0$ e che $A(t) > 0 \quad \forall t \in]0;1[$, per cui la funzione, in base al teorema di Weierstrass, ammette massimo interno all'intervallo $]0;1[$.

Deriviamo $A(t)$ e cerchiamone gli zeri.

$$A'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - 2t = 0 \Rightarrow t\sqrt{t} = \frac{1}{4} \quad \text{ovvero} \quad t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{\frac{2}{4^{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

Essendo l'unico punto stazionario è pertanto il punto corrispondente all'area massima cercata.

■

Consideriamo la sfera di raggio R (in blu in figura) uniformemente carica con densità ρ .

Poiché la distribuzione di carica ammette simmetria sferica, il campo è radiale (diretto come il raggio e con modulo dipendente solo dalla distanza dal centro della carica). Applichiamo la legge di Gauss, assumendo come superficie per il calcolo del flusso una sfera concentrica alla sfera di carica, di raggio x .

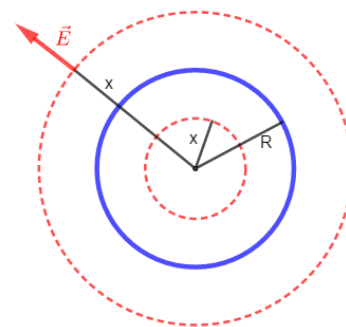
Applicando la definizione di flusso, considerata la simmetria sferica del sistema, si ha:

$$\Phi_s(\vec{E}) = 4\pi x^2 E$$

Per applicare la legge di Gauss, distinguiamo i due casi $r < R$ e $r \geq R$: al flusso contribuisce solo la carica interna alla superficie di Gauss (tratteggiata in rosso in figura)

$$\Phi_s(\vec{E}) = \begin{cases} \frac{4}{3\epsilon_0} \pi \rho x^3 & 0 \leq x < R \\ \frac{4}{3\epsilon_0} \pi \rho R^3 & x \geq R \end{cases}$$

Uguagliando le due espressioni di flusso calcolato mediante definizione e legge di Gauss si ha:



per $x < R$: $4\pi x^2 E = \frac{4}{3\epsilon_0} \pi \rho x^3 \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} x = kx$

per $x \geq R$: $4\pi x^2 E = \frac{4}{3\epsilon_0} \pi \rho R^3 \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 x^2} = \frac{kR^3}{x^2}$ pertanto

$$E = \begin{cases} kx & 0 \leq x < R \\ \frac{kR^3}{x^2} & x \geq R \end{cases}$$

Dove si è posto:

$$k = \frac{\rho}{3\epsilon_0}$$

La costante k è il rapporto tra un campo elettrico e una distanza, pertanto

$$[k] = \frac{[E]}{[L]} = \frac{[F]}{[Q][L]} = \frac{[m][L][t]^{-2}}{[Q][L]} = [m][Q]^{-1}[t]^{-2}$$

La sua unità di misura è $\frac{V}{m^2}$.

■

La forza che agisce sulla carica q è proporzionale alla distanza dal centro per $x < R$, di tipo coulombiano per $x \geq R$.

Il lavoro della prima è assimilabile a quello di una forza elastica $L = \frac{1}{2} kx^2$, quello della seconda è noto dalla teoria. Il lavoro richiesto pertanto può essere calcolato senza ricorrere al calcolo integrale:

$$L_{0 \rightarrow 2R} = L_{0 \rightarrow R} + L_{R \rightarrow 2R} = \frac{1}{2} qkR^2 + q[V(R) - V(2R)] = \frac{1}{2} kqR^2 + q\left(\frac{kR^3}{R} - \frac{kR^3}{2R}\right) = kqR^2$$

Per allontanare la carica all'infinito si deve compiere il lavoro:

$$L_{0 \rightarrow \infty} = L_{0 \rightarrow R} + L_{R \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} qkR^2 + q[V(R) - V(\infty)] = \frac{1}{2} kqR^2 + q\left(\frac{kR^3}{R} - 0\right) = \frac{3}{2} kqR^2$$

Problema 2

■

La forza che agisce sulla corrente è diretta nel piano orizzontale, perpendicolare al campo magnetico e al tratto di filo RS:

$$\vec{F}_B = i \vec{RS} \times \vec{B} \quad \text{e ha modulo } F_B = iLB$$

Per determinare la posizione di equilibrio, imponiamo che il momento di forza totale che agisce sul filo sia nullo. Sul filo agiscono la forza peso, la forza di interazione magnetica e le tensioni dei due fili; queste ultime hanno momento nullo rispetto all'asse di rotazione.

Indicando con L la lunghezza dei fili che sostengono il tratto RS, all'equilibrio si ha:

$$mgL \sin \vartheta = iBL \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \arctan \frac{iLB}{mg}$$

Invertendo il verso della corrente il filo si alza in direzione opposta, alla sinistra della retta PR della fig. 1 del testo; l'ampiezza dell'angolo non cambia.

■

$$\vartheta(x) = y = \arctan(kx)$$

Per ricavare la funzione inversa, esplicitiamo x , ottenendo:

$$kx = \tan y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{k} \tan y$$

Infine scambiamo le variabili x e y :

$$\vartheta^{-1}(x) = y = \frac{1}{k} \tan x$$

Entrambe le curve passano per l'origine:

$$\vartheta(0) = \vartheta^{-1}(0) = 0$$

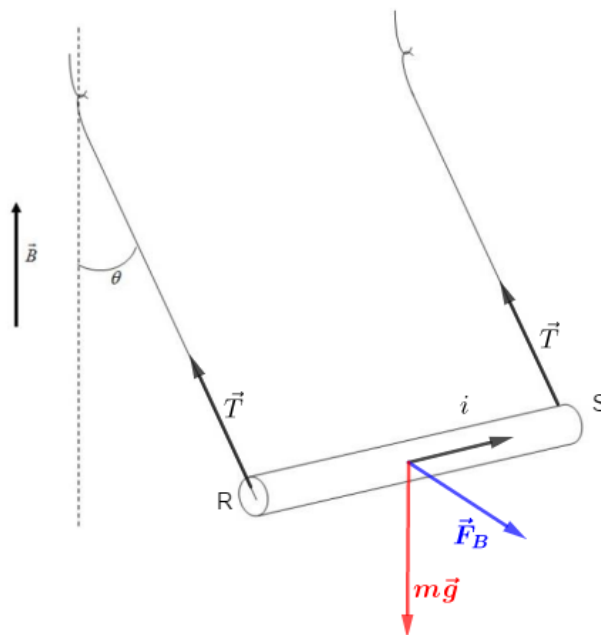
Calcoliamone la derivata per determinare la condizione di tangenza:

$$\vartheta'(x) = \frac{k}{1+k^2x^2} \quad \Rightarrow \quad \vartheta'(0) = k$$

Per il teorema della derivata della funzione inversa

$$D\vartheta^{-1}(x) \Big|_{x=0} = \frac{1}{k}$$

Perché le due curve siano tangenti si deve avere:



$$k = \frac{1}{k} \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

L'unica soluzione accettabile si ha per $k = 1$.

Imponiamo ora che le tangenti formino l'angolo di 30° :

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \frac{k - \frac{1}{k}}{1 + k\left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{k^2 - 1}{2k} \Rightarrow 3k^2 - 2\sqrt{3}k - 3 = 0$$

che ha soluzioni $k = \sqrt{3}$ e $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (non accettabile)

■

Posto $k=1$, la funzione diviene $\mathcal{G}(x) = \arctan x$.

Integrando per parti si ottiene:

$$F(x) = \int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

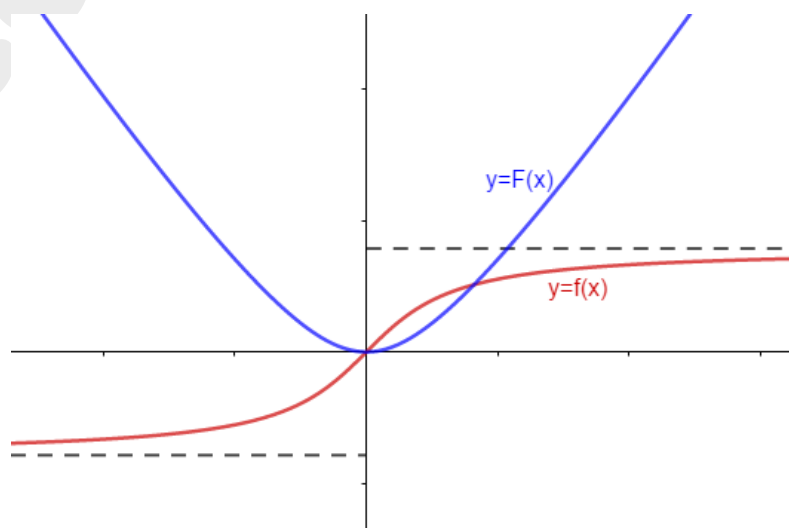
$$F(0) = 0 \text{ per } c = 0, \text{ per cui:}$$

$$F(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Osserviamo che $f(x)$ è dispari, pertanto $F(x)$ è pari.

Per $x > 0$ $f(x)$ è positiva; inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, ne segue che per $x > 0$ $F(x)$ è crescente e ammette andamento asintotico con asintoto di pendenza $m = \frac{\pi}{2}$; risultati simmetrici per $x < 0$.

I grafici delle due curve sono riportati nella figura seguente



QUESITI

1

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - x)^{-\frac{1}{x}} \right]^{-1} = e^{-1}$$

2

Sia $I = \int_0^{x_0} k \cdot f(kx) dx$

Con il cambio di variabile $kx = t$, $kdx = dt$ si ha:

$$I = \int_0^{t_0} f(t) dt = \int_0^{t_0} t \sin t dt = \int_0^{\pi} t \sin t dt.$$

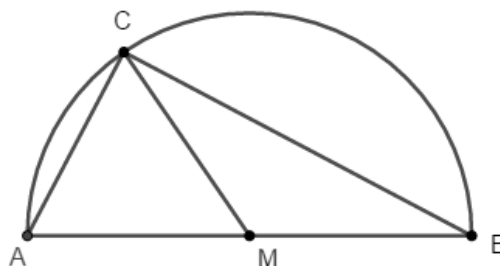
dove $t_0 = kx_0 = \pi$ è il primo reale positivo per cui $f(t) = 0$ ($t_0 = \pi$).

Nell'espressione di I non figura il valore k , pertanto I è indipendente da k .

3

Nelle ipotesi date, la circonferenza di centro M e raggio MA passa per B e C .

Il triangolo ABC è inscritto in una semicirconferenza, pertanto è rettangolo.



4

Per verificare l'appartenenza di T al piano π basta sostituirne le coordinate nell'equazione del piano:

$$1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 3$$

La normale al piano in T ha equazione parametrica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

Prendiamo su di essa il punto generico $C(1+t, -2t, 1+2t)$. Perché C sia il centro della sfera cercata, si deve avere:

$$\overline{CT} = \overline{CP} \Rightarrow t^2 + (-2t)^2 + (2t)^2 = [(t+1)-1]^2 + (-2t)^2 + [(2t+1)-5]^2$$

Semplificando: si ottiene: $16t - 16 = 0$ da cui $t = 1$.

La sfera ha centro in $C(2, -2, 3)$ e raggio $\overline{CT} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

L'equazione della superficie sferica richiesta è infine:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$$

5

Casi possibili: $\binom{40}{6}$; casi favorevoli (tutte carte nere): $\binom{20}{6}$

$$P(\text{nessuna rossa}) = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{40}{6}} = 0,010$$

Le 6 carte devono comprendere 2 assi, estratti tra i 4 presenti, e 4 carte estratte tra i quattro assi, le altre 4 le restanti 36 diverse dagli assi:

$$P(2 \text{ assi}) = \frac{\binom{4}{2} \binom{36}{4}}{\binom{40}{6}} = 0,092$$

6

Assumiamo che il campo elettrico all'interno del condensatore sia uniforme, di intensità

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

diretto nel verso negativo dell'asse y ; notiamo tuttavia che l'approssimazione in questo caso non è particolarmente buona in quanto la condizione $d \ll l$ non è assolutamente rispettata.

L'elettrone risente un'accelerazione costante, diretta nel verso positivo dell'asse y , di modulo

$$a = \frac{eE}{m_e} = \frac{e\Delta V}{m_e d}$$

Le equazioni del moto dell'elettrone, nel sistema di riferimento indicato, sono pertanto:

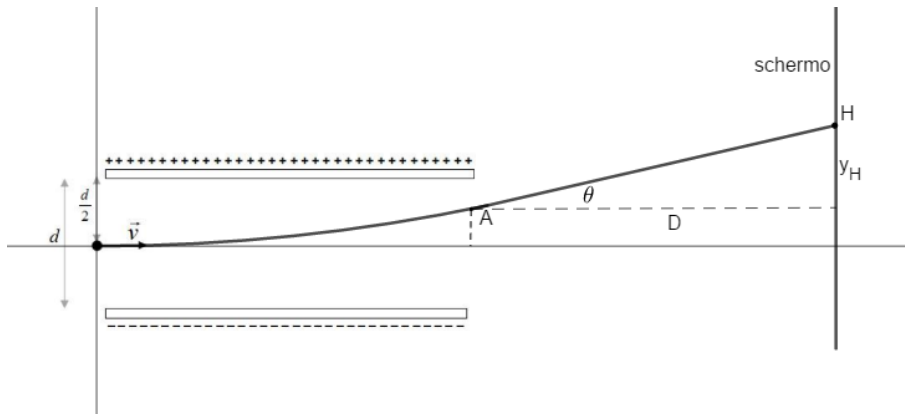
$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{e\Delta V}{2m_e d} t^2 \end{cases}$$

Determiniamo posizione e velocità con cui l'elettrone esce dal campo (indichiamo con A il punto di uscita):

$$\begin{cases} t = \frac{l}{v_0} \\ y_A = \frac{e\Delta V l^2}{2m_e d v_0^2} \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = at = \frac{e\Delta V l}{m_e d v_0} \end{cases}$$

La velocità di uscita forma con la direzione orizzontale un angolo θ tale che

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{e\Delta V l}{m_e d v_0^2}$$



L'elettrone impatta sullo schermo nel punto H di ordinata

$$y_H = y_A + D \tan \theta = \frac{e\Delta V l^2}{2m_e d v_0^2} + D \frac{e\Delta V l}{m_e d v_0^2} = \frac{e\Delta V l}{m_e d v_0^2} \left(\frac{l}{2} + D \right)$$

La distanza D cui deve essere collocato lo schermo è infine:

$$D = \frac{m_e d v_0^2}{e\Delta V l} y_H - \frac{l}{2} = \frac{(9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(0,030 \text{ m})(2,5 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2}{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})(15 \text{ V})(0,040 \text{ m})} (0,20 \text{ m}) - \frac{0,040 \text{ m}}{2} = 34 \text{ cm}$$

7

Il sistema protone- α è isolato, pertanto si conservano energia e quantità di moto.

Le due particelle, di carica positiva, si respingono e, nell'istante in cui si trovano alla minima distanza, hanno la stessa velocità. Questa osservazione può essere verificata in modo semplice considerando il sistema di riferimento S' solidale alla particella α : in tale riferimento α ha velocità nulla e il protone, nella posizione di minima distanza, è istantaneamente fermo: ciò comporta che nel sistema del laboratorio la velocità del protone uguaglia quella di S' , ovvero quella della particella α .

Il testo indica che "un protone viene sparato su una particella α "; si può pertanto assumere la particella α come bersaglio, ovvero con velocità iniziale nulla.

Imponendo la conservazione di energia e quantità di moto

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_p v_0^2 + \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}} + \frac{1}{2} (m_p + m_\alpha) v^2 \\ m_p v_0 = (m_p + m_\alpha) v \end{cases}$$

Su scala particellare la distanza iniziale $r_0 = 10 \text{ cm}$ è praticamente infinita: nonostante il protone abbia, sempre su scala particellare, una velocità molto bassa, l'energia di interazione tra le cariche è trascurabile rispetto all'energia cinetica del protone: possiamo verificarlo numericamente

$$\frac{1}{2} m_p v_0^2 = \frac{1}{2} (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) (5,00 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2 = 2,1 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

$$\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{2\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(0,10 \text{ m})} = 4,6 \cdot 10^{-27} \text{ J}$$

ponendo $m_\alpha \cong 4m_p$ possiamo pertanto scrivere:

$$\begin{cases} m_p v_0^2 = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 r_{\min}} + 5m_p v^2 \\ v = \frac{v_0}{5} \end{cases} \quad \text{da cui infine}$$

$$\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 r_{\min}} = \frac{4}{5} m_p v_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{\min} = \frac{5e^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_0^2} = \frac{5(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{4\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})(5,00 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2} = 2,76 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Senza utilizzare l'approssimazione per l'energia avremmo ottenuto:

$$\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 r_{\min}} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 r_0} + \frac{4}{5} m_p v_0^2 \Rightarrow r_{\min} = \frac{\frac{e^2}{\pi\epsilon_0}}{\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 r_0} + \frac{4}{5} m_p v_0^2} = \frac{1}{\frac{1}{r_0} + \frac{4\pi\epsilon_0}{5} \frac{m_p v_0^2}{e^2}} = 2,76 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

8

L'elettrone, in presenza dei due campi, risente la forza

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Perché non risenta deviazione tale forza deve essere nulla, pertanto il campo elettrico necessario è dato da:

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

diretto perpendicolarmente al piano del foglio, uscente da esso, e con modulo

$$E = vB \sin \alpha = (1,5 \cdot 10^4 \text{ m/s})(0,20 \text{ T}) \sin 10^\circ = 520 \text{ V/m}$$

