Simulazione ministeriale dell'Esame di Stato 2019 – Matematica e Fisica

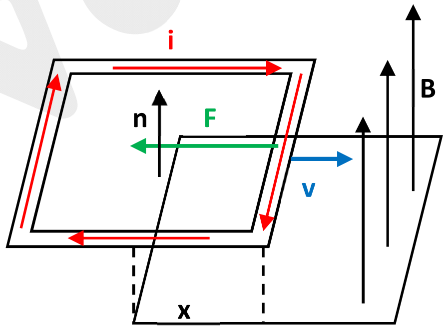
Problema n. 1

1

Passando sopra il magnete, la spira è sottoposta ad una variazione di flusso che genera in essa una forza elettromotrice e, conseguentemente, una corrente indotta. L'effetto frenante può giustificarsi immediatamente a partire dalla legge di Lenz, in base alla quale l'effetto indotto si oppone alla causa che lo ha generato, determinando conseguentemente una forza la cui direzione è opposta alla velocità del treno.
Analizzando il fenomeno da un punto di vista energetico, si evidenzia altresì la relazione tra legge di Lenz e principio di conservazione dell'energia: il passaggio della corrente nella spira dissipa energia per effetto Joule; tale energia deve provenire dall'unica fonte presente nel sistema, ovvero dall'energia cinetica del treno, che pertanto rallenta.

2

Consideriamo preliminarmente la situazione in cui la spira entra nel campo magnetico.
Orientando la spira verso l'alto, in modo che il versore **n** ad essa normale sia parallelo al campo magnetico, e indicando con *x = x(t)* la distanza tra il lato anteriore della spira e il lato posteriore del quadrato che contiene il campo, corrispondente in questo caso alla lunghezza della parte di spira entrata nel campo magnetico, il flusso istantaneo del campo attraverso la spira vale[1]:



$$\Phi\left(\vec{B}\right) = B\,L\,x(t)$$

Conseguentemente si determina la corrente indotta:

$$i = \frac{f.e.m.}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d\left(BLx\right)}{dt} = -\frac{BL}{R}\frac{dx}{dt} = -\frac{BLv}{R}$$

nella quale il segno "-" indica che la corrente circola nel verso negativo della spira ovvero, con riferimento alla figura, in senso orario. L'interazione della corrente con il campo magnetico esterno determina la forza di Lorentz che si oppone al moto di avanzamento della spira:

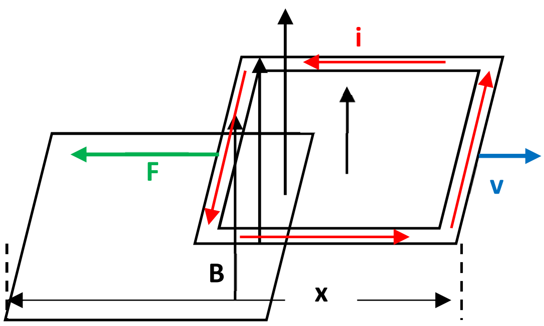
$$\vec{F} = i\,\vec{L}\times\vec{B} \quad \Rightarrow \quad F = i\,L\,B = -\frac{B^2L^2}{R}v$$

da cui infine

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2}{R}v$$

La situazione è simmetrica in fase di uscita; con la stessa notazione, il flusso del campo magnetico vale ora:

$$\Phi\left(\vec{B}\right) = B\,L\left[2L - x(t)\right]$$



[1] La figura riportata nel testo, che riporta gli avvolgimenti lungo i lati del quadrato, a formare un solenoide chiuso su se stesso, è evidentemente sbagliata, in quanto in tale configurazione non si ha variazione di flusso, quindi non possono esserci fenomeni indotti; la spira deve essere semplicemente un conduttore chiuso posizionato sui lati del quadrato. Anche il valore del campo magnetico è esageratamente grande, non compatibile con il sistema descritto.

ne segue

$$i = \frac{f.e.m.}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d\left[BL\left(2L-x\right)\right]}{dt} = \frac{BLv}{R}$$

La corrente cambia verso, in accordo alla legge di Lenz, in quanto questa volta tende ad opporsi alla diminuzione del flusso del campo, generando un campo magnetico concorde con quello esterno; la forza sulla spira è ancora diretta in senso opposto al moto della spira (verso sinistra in figura) in quanto ora il campo interagisce con la corrente presente nel lato posteriore della spira (valgono ovviamente le stesse considerazioni energetiche svolte al punto 1).

L'equazione del moto trovata è pertanto valida per l'intero moto della spira.

3

Assumendo la relazione $v\left(t\right) = v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$, si ha:

$$a = \frac{d}{dt}v\left(t\right) = -\frac{v_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

L'equazione del moto diviene

$$-\frac{m\,v_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{B^2L^2}{R}v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

che risulta identicamente vera per $\tau = \frac{mR}{B^2L^2} = 0,55\ s$ e per ogni velocità iniziale v_0.

4

Essendo

$$v\left(t\right) = \frac{d}{dt}x\left(t\right) \quad \Rightarrow \quad d\,x\left(t\right) = v\left(t\right)d\,t$$

La spira esce completamente dal campo all'instante *T* in cui $x = 2L$.
Integrando i due membri dell'equazione si ha:

$$2L = \int_0^{2L} dx = \int_0^T v\,dt = \int_0^T v_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}\,dt = \left|-v_0\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right|_0^T = v_0\tau\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)$$

risolvendo per *T* si ha infine:

$$T = -\tau\ln\left(1-\frac{2L}{v_0\tau}\right) = 1,32\ s$$

Notiamo, anticipando la risposta al successivo punto 5, che questa equazione ha senso, ovvero la spira riesce ad uscire dal campo, solo se

$$1-\frac{2L}{v_0\tau}>0 \quad \Rightarrow \quad v_0>\frac{2L}{\tau}$$

la velocità di uscita risulta:

$$v_u=v(T)=v_0\,e^{\ln\left(1-\frac{2L}{v_0\tau}\right)}=v_0\left(1-\frac{2L}{v_0\tau}\right)=v_0-\frac{2L}{\tau}=0,018\,m\,s^{-1}$$

5

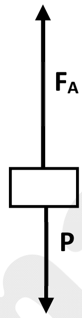
La condizione limite perché il treno si arresti è che *v_u* si annulli; indicando con $v_{0,MAX}$ la massima velocità consentita per il treno si ottiene

$$v_u=v_{0,MAX}-\frac{2L}{\tau}=0 \quad \Rightarrow \quad v_{0,MAX}=\frac{2L}{\tau}=0,18\,m\,s^{-1}$$

pertanto la spira non supera il magnete se $v_0\le v_{0,MAX}=\frac{2L}{\tau}=0,18\,m\,s^{-1}$, in accordo con quanto trovato al punto precedente.

Problema n. 2

1



Subito dopo il decollo sul sistema agiscono la forza peso (pallone + uomo) P e la spinta di Archimede F_A, di intensità circa doppia, rivolta verso l'alto

2

Quando il corpo sale la forza di attrito, opposta alla velocità, quindi diretta verso il basso, non è più trascurabile; se il sistema si muove a velocità costante, e assumendo che la spinta di Archimede sia circa doppia del peso, si ha (scriviamo l'equazione in forma scalare, assumendo positiva la direzione verso l'alto:

$$F_A - P - f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = F_A - P \approx P \approx 3 \cdot 10^4 \, N$$

dove si è assunto per la massa del sistema il valore 3000 kg riportato dal giornale

3

Assumendo un riferimento con l'origine nel punto di lancio di Baumgartner, con la direzione positiva rivolta verso il basso, il moto di caduta avviene con accelerazione pressoché costante per i primi 20 s (accelerazione data da $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} \cong \dfrac{195 \, m\,s^{-1}}{20 \, s} = 9,8 \, m\,s^{-2}$ ovvero è in caduta libera con accelerazione pari all'accelerazione di gravità g; essendo il raggio della Terra pari a circa 6300 km, a 40 km di quota l'accelerazione di gravità è praticamente identica a quella misurata in superficie.

Tra 20 s e 50 s l'accelerazione diminuisce progressivamente, dapprima lentamente, poi in misura sempre più consistente: tra 20 e 40 s l'accelerazione media vale $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} \cong \dfrac{(350 - 195) \, m\,s^{-1}}{20 \, s} = 7,8 \, m\,s^{-2}$, tra 40 e 50 s scende a 2,5 m/s^2.

A 50 s dal lancio si raggiunge la velocità massima $v \cong 375 \, m/s$, dopodiché l'accelerazione diventa negativa (rivolta verso l'alto), in quanto la forza di attrito supera la forza peso e il sistema rallenta, fino a raggiungere, a partire da circa 200 s, un limite asintotico compreso tra circa 50 e 60 m/s, dopodiché Baumgartner apre il paracadute.

4

Comparando i grafici con la tabella fornita si ha:

Altezza (km)	10	20	30	40
Velocità del suono (m/s)	305	297	301	318
Velocità Baumgartner (m/s)	100	250	370	-

Quindi Baumgartner ha superato la velocità del suono attorno ai 30 km di quota; la sua velocità si mantiene sopra la velocità del suono, che ha solo una piccola variazione tra 20 e 40 km di quota, per circa 30 s, nell'intervallo compreso tra 35 s e 65 s circa dal lancio.

5

La variazione di energia meccanica è data dalla somma delle variazioni dell'energia cinetica e dell'energia gravitazionale; assumendo costante l'accelerazione di gravità si ha:

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta U = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 - mg\Delta h \cong 120\ kg \left[\frac{1}{2}\left(375\ ms^{-1}\right)^2 - 9,8\ ms^{-2} \cdot \left(3,9 - 2,7\right) \cdot 10^4\ m \right] = -5,7 \cdot 10^6\ J$$

La variazione di energia è dovuta al lavoro resistente prodotto dalla forza di attrito, che corrisponde a circa 1/3 del lavoro della forza peso ($1,5 \cdot 10^7$ J); in assenza di attrito, cadendo per circa 13 km Baumgartner avrebbe raggiunto la velocità di circa 505 m/s.

6

La forza totale sul sistema è proporzionale all'accelerazione, ovvero alla pendenza della tangente al grafico (t;v).
Osserviamo che a 40 s la velocità sta aumentando, per cui $f < P$, a 50 s la velocità è stazionaria, per cui $f = P$, a 60 s la velocità sta diminuendo, per cui f >P, per cui la sequenza temporale dei diagrammi è : B, C, A.

7

Baumgartner ha aperto il paracadute dopo 260 s dal lancio, ovvero alla quota di 2500 m circa. L'apertura determina inizialmente una forte decelerazione, in quanto la forza di attrito aumenta in tempi brevi in modo consistente; successivamente il sistema raggiungerà una velocità limite inferiore a quella precedentemente trovata, dopodiché il moto può assumersi uniforme.
La velocità media dell'ultima fase è data da:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cong \frac{2500\ m}{(543 - 260)\ s} = 8,8\ ms^{-1}$$

velocità che si potrebbe raggiungere saltando dalla quota $h = \frac{v^2}{2g} \cong 4\ m$

QUESTIONARIO

Quesito n. 1

L'equazione di moto della barretta è $y=\frac{1}{2}wt^2$, con $\frac{dy}{dt}=wt$

Per calcolare il flusso del campo magnetico, invertiamo l'equazione della parabola (per il ramo $x\geq 0$) ottenendo $x=\sqrt{\frac{y}{a}}$. Integriamo quindi lungo l'asse *y*, nell'intervallo $\left[0;y\right]$, introducendo la variabile muta *y'* in modo da lasciare la dipendenza da *y* nell'estremo superiore dell'integrale[2]. Orientando la spira lungo l'asse *z* si ottiene (si noti che il campo magnetico è entrante, per cui il flusso è negativo).

$$\Phi\left(\vec{B}\right)=-2B\int_0^y\sqrt{\frac{y'}{a}}\,dy'$$

$$f.e.m.=-\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}=-\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dy}\frac{dy}{dt}=2B\sqrt{\frac{y}{a}}\cdot wt$$

Dalla legge oraria della barretta si ottiene $t=\sqrt{\frac{2y}{w}}$, per cui

$$f.e.m.=2B\sqrt{\frac{y}{a}}\cdot wt=2Bw\sqrt{\frac{y}{a}}\cdot\sqrt{\frac{2y}{w}}=2B\sqrt{\frac{2w}{a}}\,y$$

Quesito n. 2

$$x=\alpha t\left(1-\beta t\right)=\alpha t-\alpha\beta t^2$$

$$v=\frac{dx}{dt}=\alpha-2\alpha\beta t$$

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=-2\alpha\beta$$

La particella torna nell'origine all'istante $t=\frac{1}{\beta}$.

La variazione di posizione è ovviamente nulla; intendendo lo spazio percorso come somma degli spostamenti di andata e ritorno, osservando che la velocità si inverte all'istante $t=\frac{1}{2\beta}$, lo spazio percorso è dato da

$$s=2\left|x\left(t=\frac{1}{2\beta}\right)\right|=2\frac{|\alpha|}{2\beta}\left(1-\beta\frac{1}{2\beta}\right)=\frac{|\alpha|}{2\beta}$$

[2] In questo caso il flusso potrebbe essere calcolato anche utilizzando il teorema di Archimede per determinare l'area del segmento parabolico. Il metodo indicato ha tuttavia più generalità: non dovendo calcolare l'integrale, può essere utilizzato anche per funzioni dove tale calcolo fosse laborioso o anche impossibile.

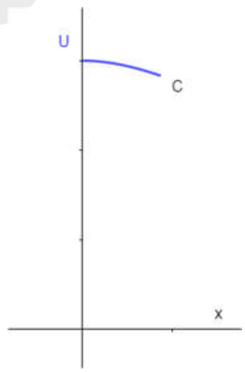
Quesito n. 3

a) Indicando con *L* il lato del triangolo, l'energia potenziale del sistema vale:

$$U = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}$$

b) Indicando con *x* la distanza tra la carica in C e il lato AB $\left(0 \le x \le \frac{L}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}m\right)$

$$U = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\frac{L^2}{4}+x^2}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(1+\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4x^2}{L^2}}}\right) = k\left(1+\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4x^2}{L^2}}}\right)$$



nell'ultima parentesi è preferibile, per questioni di correttezza dimensionale, mantenere il rapporto $\frac{x}{L}$, senza inserire la misura di *L.*

L'energia aumenta spostando la carica dal punto C verso il segmento AB (da destra a sinistra nel grafico in figura); lo spostamento richiede infatti l'applicazione di una forza esterna che compie lavoro contro il campo elettrico.

Quesito n. 4

$$x = a\,\mathrm{sen}(\omega t); \quad y = a(1-\cos(\omega t))$$

Se τ è un istante qualunque, si ha:

$$D = \sqrt{x^2+y^2} = a\sqrt{\mathrm{sen}^2(\omega\tau)+(1-\cos(\omega\tau))^2} = a\sqrt{2(1-\cos(\omega\tau))} = 2a\sqrt{\frac{1-\cos(\omega\tau)}{2}} = 2a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

In assenza di indicazione esplicita non è lecito ipotizzarlo dal testo, se però con τ si intendesse, come nella notazione abituale, il periodo delle due funzioni, $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, allora $D(\tau) = 2a$.

$$v_x = a\omega\cos(\omega t) \Rightarrow v_x(0) = a\omega; \quad v_y = a\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) \Rightarrow v_y(0) = 0$$

la velocità è diretta lungo l'asse *x* positivo.

$$a_x = -a\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t) \Rightarrow a_x(0) = 0; \quad a_y = a\omega^2\cos(\omega t) \Rightarrow a_y(0) = a\omega^2$$

l'accelerazione è diretta lungo l'asse *y* positivo

Quesito n. 5

Poiché la carica è inizialmente ferma, la forza è sempre parallela alla velocità, per cui l'equazione relativistica del moto è[3]:

$$F = eE = m_e \gamma^3 \frac{dv}{dt}$$

La carica deve raggiungere una velocità tale che

$$mc^2(\gamma - 1) = mc^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

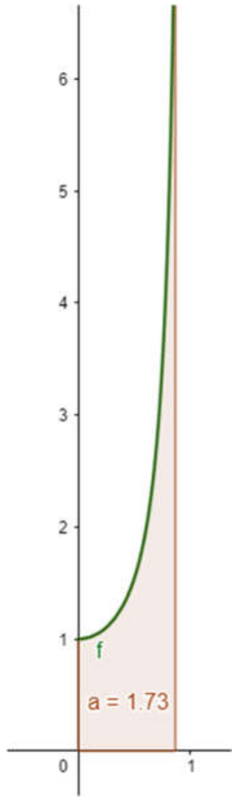
Integrando l'equazione del moto si ottiene

$$\int_0^t eE\,dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}c} m_e \gamma^3\,dv \quad \Rightarrow \quad t = \frac{m_e}{eE}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}c} \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Eseguiamo un cambiamento di variabile

$$\frac{v}{c} = \operatorname{sen} t \quad \Rightarrow \quad dv = c\cos t\,dt \quad \text{ottenendo}$$

$$t = \frac{m_e c}{eE}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t\,dt}{\left(1 - \operatorname{sen}^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m_e c}{eE}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{m_e c}{eE}\left|\operatorname{tg} t\right|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}\,\frac{m_e c}{eE} = 3{,}0 \cdot 10^{-9}\,s$$



Dal momento che la normativa consente l'uso di calcolatrici che svolgono numericamente integrali definiti (ve ne sono anche di economiche, non di tipo grafico), il risultato potrebbe essere ottenuto direttamente a partire dall'integrale nella variabile x (evidenziamo che il testo chiede solo di indicare un procedimento, non di svolgerlo completamente).

Quesito n. 6

Indichiamo la distanza tra i due punti con *L* anziché con *l* per maggior chiarezza grafica.

Ricaviamo preliminarmente la relazione tra temperatura e posizione:

essendo $T(0) = T_1$ e $T(L) = T_2$, per la linearità di *T* con la posizione si ha:

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x \qquad \text{da cui:}$$

---

[3] Questa equazione del moto consente di evidenziare l'inopportunità di introdurre la cosiddetta massa relativistica, $m = m_0\gamma$, come si trova ancora in molti testi scolastici; è preferibile, seguendo lo stesso Einstein e gli autori moderni più autorevoli, considerare la massa come invariante, riscrivendo opportunamente le equazioni della dinamica.

$$v(x)=\frac{dx}{dt}=a\sqrt{T_1+\frac{T_2-T_1}{L}x}$$

Separando le variabili e integrando i due membri dell'uguaglianza si ottiene:

$$\int_0^t dt=\int_0^L \frac{dx}{v(x)}=\int_0^L \frac{dx}{a\sqrt{T_1+\frac{T_2-T_1}{L}x}} \qquad \text{da cui}$$

$$t=\frac{2L}{a(T_2-T_1)}\left|\sqrt{T_1+\frac{T_2-T_1}{L}x}\right|_0^L=\frac{2L}{a(T_2-T_1)}\left(\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}\right)=\frac{2L}{a\left(\sqrt{T_2}+\sqrt{T_1}\right)}$$

Quesito n. 7

Premettiamo che il grafico riportato non chiarisce in modo inequivocabile se la curva presenti un asintoto verticale in corrispondenza dell'ascissa 2 oppure se diverga lungo entrambi gli assi.
Osserviamo che la velocità della carica è nulla nella posizione/istante iniziale e raggiunge un valore limite quando le cariche sono infinitamente lontane; infatti, indicando con *Q* la carica fissa, con *q* e *m* la carica in movimento e la sua massa, con *a* la loro distanza iniziale, si ha:

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \Rightarrow \quad v=\sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)} \xrightarrow{r\to\infty} \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 ma}}$$

pertanto se il grafico ha un asintoto verticale può, almeno qualitativamente, rappresentare quanto richiesto in due situazioni:

- riportando in ascissa la velocità della carica e in ordinata il tempo (fig. 1);
- riportando in ascissa la velocità della carica e in ordinata la sua posizione y, in un sistema di riferimento in cui questa si trovi inizialmente nell'origine (fig. 2a, 2b), con la carica Q nel punto di coordinate (0; -a).

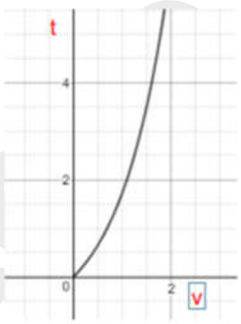


fig. 1

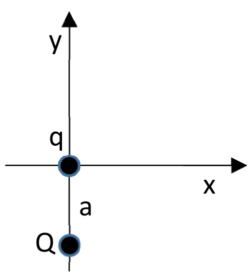


fig. 2a

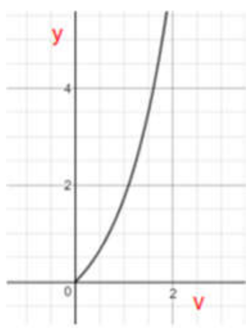


fig 2b

Non è invece possibile alcuna rappresentazione della velocità qualora il grafico non presenti asintoto verticale.

Quesito n. 8

a) Si ha $0 \le x \le a$, quindi il moto ha ampiezza $A = \frac{a}{2}$ e centro in $x_0 = \frac{a}{2}$

poiché la funzione $f(x) = \sin^2 x$ ha periodo π, il periodo del moto è: $T = \frac{\pi}{3}$.

Si può anche osservare che, applicando la formula di bisezione $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, la legge oraria può essere scritta nella forma

$$x = a\left[\frac{1-\cos\left(6t-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right] = \frac{a}{2}(1-\operatorname{sen} 6t)$$

da cui si riconosce immediatamente un moto armonico con le caratteristiche già individuate.

b) $a\operatorname{sen}^2\left(3t-\frac{\pi}{4}\right) = a \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\left(3t-\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 3t-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{4}$