Esame di Stato 2019 – Matematica-Fisica

Problema 1

1

Deriviamo la funzione $g(x)=(ax+b)e^{2x-x^2}$

$$g'(x)=e^{2x-x^2}\left[a+(ax+b)(2-2x)\right]=e^{2x-x^2}\left[-2ax^2+2(a-b)x+a+2b\right]$$

$$g'(x)=0 \quad \text{per} \quad 2ax^2-2(a-b)x-a-2b=0$$

da cui

$$x=\frac{a-b\mp\sqrt{(a-b)^2+2a(a+2b)}}{2a}=\frac{a-b\mp\sqrt{a^2-2ab+b^2+2a^2+4ab}}{2a}=\frac{a-b\mp\sqrt{(a+b)^2+2a^2}}{2a}$$

che ammette 2 soluzioni distinte $\forall a\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Per la condizione di passaggio si ha:

$$\begin{cases} f(2)=1 \\ g(2)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a-2+b=1 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+b=3 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

Per cui le due funzioni diventano

$f(x)=x^2-x-1$ e $g(x)=(x-1)e^{2x-x^2}$

2

$f(x)=x^2-x-1$

è una parabola con vertice di coordinate $V\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{4}\right)$

$$g(x)=(x-1)e^{2x-x^2}$$

$$g(x)=(x-1)e^{2x-x^2}>0 \quad \Rightarrow \quad x>1$$

$$\lim_{x\to\mp\infty}(x-1)e^{2x-x^2}=0^{\pm}$$

dal punto precedente si ottiene subito, sostituendo i valori di *a* e *b* trovati,

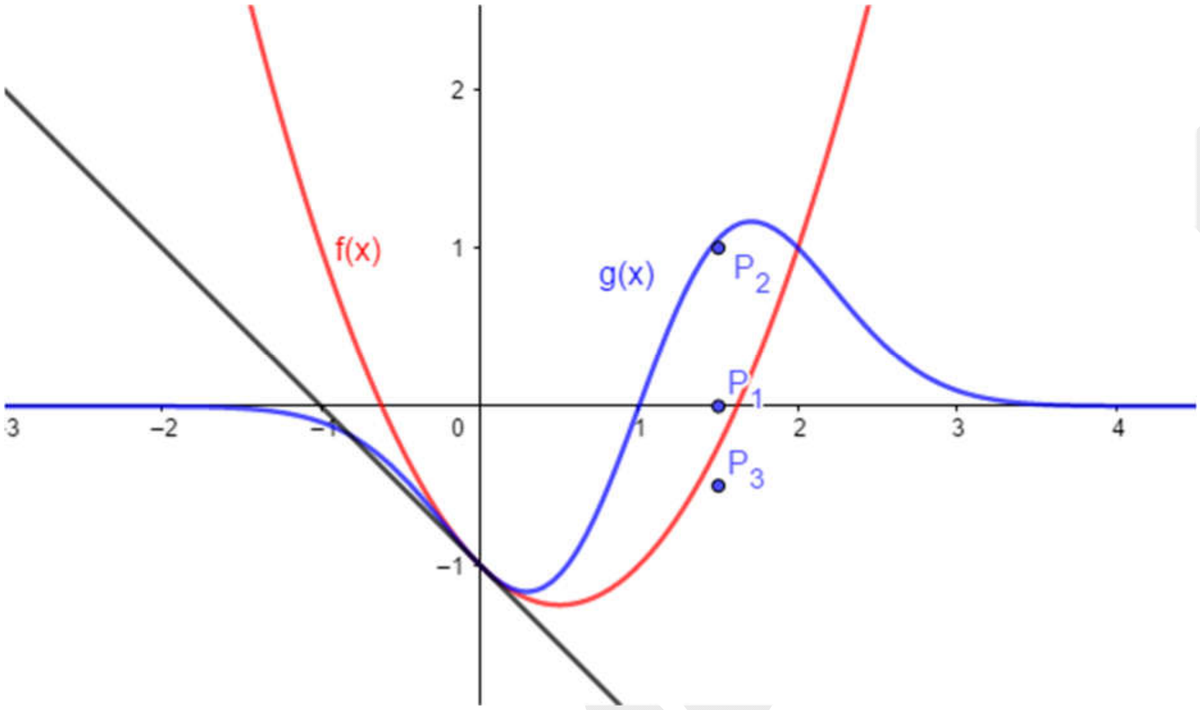
$$g'(x)=e^{2x-x^2}\left(-2x^2+4x-1\right)$$

$$g'(x)=e^{2x-x^2}\left(-2x^2+4x-1\right)=0 \quad \text{per} \quad x=\frac{2\mp\sqrt{2}}{2} \quad \text{con} \quad g'(x)>0 \quad \text{per} \quad x\in\left]\frac{2-\sqrt{2}}{2};\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right[$$

Si ha infine:

$$g''(x)=2e^{2x-x^2}\left(2x^3-6x^2+3x+1\right)=2e^{2x-x^2}(x-1)\left(2x^2-4x-1\right)$$

Con flessi di ascissa $x=1,\ x=\dfrac{2\mp\sqrt{6}}{2}$



Verifichiamo che il punto $C(1;0)$ è centro di simmetria della funzione: applicando alla funzione $y=g(x)$ la trasformazione

$$\begin{cases}\dfrac{x+x'}{2}=1\\[2mm] \dfrac{y+y'}{2}=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x=2-x'\\ y=-y'\end{cases}$$

si ottiene:

$$-y'=(2-x'-1)e^{2(2-x')-(2-x')^2} \quad\Rightarrow\quad y'=(x'-1)e^{2x'-x'^2}=y$$

Per verificare la tangenza tra le due curve basta osservare che:

$$f(0)=-1,\ f'(x)=2x^2-1 \quad\Rightarrow\quad f'(0)=-1 \qquad \text{e}$$

$$g(0)=-1,\ g'(0)=-1$$

Per cui le due curve sono entrambe tangenti nel punto B alla retta di equazione $y=-x-1$ pertanto sono tangenti tra di loro.

L'area della regione S è data dall'integrale definito

$$S=\int_0^2\left[g(x)-f(x)\right]dx=\int_0^2(x-1)e^{2x-x^2}dx-\int_0^2\left(x^2-x-1\right)dx=$$

$$=0-\left|\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right|_0^2=\frac{4}{3}$$

dove si è usato

$$\int_0^2(x-1)e^{2x-x^2}dx=0$$ per la simmetria di *g(x)* rispetto al punto *B (1; 0)*.

3

Si ha:

$$\Gamma\left(\vec{B}\right)=\mu_0\sum i_{conc}$$

Per verificare se le tre correnti sono concatenate a S, calcoliamo il valore assunto dalle due funzioni del contorno per $x=\frac{3}{2}$:

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{4}\qquad g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{e^{\frac{3}{4}}}{2}\simeq 1{,}06$$

per cui

$P_1, P_2\in S,\quad P_3\notin S$. Ne segue che la circuitazione del campo magnetico lungo S, orientando la superficie nel verso uscente dal piano *xy*, quindi la linea in senso antiorario, è data da $\Gamma\left(\vec{B}\right)=\mu_0\left(i_2-i_1\right)$

Per cui

$$\Gamma\left(\vec{B}\right)=\mu_0\left(i_2-i_1\right)\begin{cases}<0 & \left(i_2<2{,}0\,\text{A, uscente, oppure } i_2 \text{ entrante}\right)\\ =0 & i_2=i_1\left(i_2=2{,}0\,\text{A, uscente}\right)\\ >0 & i_2>i_1\left(i_2>2{,}0\,\text{A, uscente}\right)\end{cases}$$

La corrente i_3 non influisce sulla circuitazione del campo magnetico.

4

La corrente indotta nella spira è data da

$$i=-\frac{1}{R}\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}=-\frac{1}{R}\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{dt}=-\frac{1}{R}\frac{d\left(BS\cos\omega t\right)}{dt}=\frac{\omega BS}{R}\sin\omega t$$ da cui

$$i_{\max}=\frac{\omega BS}{R}\quad\Rightarrow\quad\omega=\frac{Ri_{\max}}{BS}=\frac{0{,}20\,\Omega\cdot 5{,}0\cdot 10^{-3}\,\text{A}}{1{,}5\cdot 10^{-2}\,\text{T}\cdot\frac{4}{3}\,\text{m}^2}=0{,}05\ \text{s}^{-1}$$

Problema 2

1

$$\left[a\right]=\left[t\right]\to s$$ (somma di grandezze omogeneee)

Isolando *k* nella definizione assegnata del campo magnetico, limitandosi alla sola dimensionalità, si ha:

$$\left[k\right]=\frac{\left[B\right]\cdot\left[t\right]^3}{\left[L\right]\cdot\left[t\right]}=\left[B\right]\left[L\right]^{-1}\left[t\right]^2\to \mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^2$$

La d.d.p. variabile determina all'interno del condensatore un campo elettrico anch'esso variabile nel tempo; dalla IV equazione di Maxwell si ha:

$$\Gamma\left(\vec{B}\right)=\mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi\left(\vec{E}\right)}{dt} \tag{1}$$

Per la simmetria del sistema, trascurando gli effetti di bordo, il campo elettrico è uniforme (ma variabile nel tempo) all'interno del condensatore, con modulo

$$E\left(t\right)=\frac{V\left(t\right)}{d} \tag{2}$$

Il campo magnetico indotto ha linee di campo circolari, modulo costante ed è diretto nel piano perpendicolare alle linee del campo elettrico (quindi in piani paralleli alle armature del condensatore); il verso di $\vec{B}$ dipende invece dalla variazione del campo elettrico, non è pertanto deducibile dai dati forniti (comunque non è richiesto).

Per quanto detto, per $r\le R$ si ha:

$$2\pi rB=\mu_0\varepsilon_0\pi r^2\frac{dE}{dt}\quad\Rightarrow\quad B=\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}\frac{dE}{dt}r\qquad r\le R \tag{3}$$

che ha la forma della funzione $\left|\vec{B}\right|$ data nel testo.

2

Inserendo nella (1) il valore assegnato di $\left|\vec{B}\right|$ si ha:

$$\frac{d\Phi\left(\vec{E}\right)}{dt}=\frac{\Gamma\left(\vec{B}\right)}{\mu_0\varepsilon_0}=\frac{2\pi rB}{\mu_0\varepsilon_0}=\frac{2\pi r^2k}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{t}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)^3}} \tag{4}$$

$$\Phi\left(\vec{E}\right)=\frac{2\pi kr^2}{\mu_0\varepsilon_0}\int_0^t\frac{t}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)^3}}\,dt=\frac{2\pi kr^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left|-\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right|_0^t=\frac{2\pi kr^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)}}\right) \tag{5}$$

Essendo, per la (2)

$$\Phi\left(\vec{E}\right)=\pi r^2 E=\pi r^2\frac{V}{d}$$ si ha:

$$V=\frac{d}{\pi r^2}\Phi\left(\vec{E}\right)=\frac{d}{\pi r^2}\frac{2\pi k r^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)}}\right)=\frac{2kd}{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)}}\right) \tag{6}$$

La d.d.p. tra le armature del condensatore tende ad assumere, al trascorrere del tempo, un valore costante:

$$\lim_{t\to+\infty}V\left(t\right)=\frac{2kd}{\mu_0\varepsilon_0 a}=\text{costante}$$

conseguentemente anche il campo elettrico tende ad assumere un valore costante per cui non si manifestano più effetti indotti:

$$\lim_{t\to+\infty}\left|B\left(t\right)\right|=0$$

3

$$f(t)=-\frac{t}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)^3}} \qquad\qquad F(t)=\frac{1}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)}}-\frac{1}{a}$$

Segue dall'integrazione (5) che $F(t)$ è la primitiva di $f(t)$ tale che $F(0)=0$

$$F\left(t\right)=-\int_0^t\frac{t}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)^3}}\,dt=-\left|-\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right|_0^t=\frac{1}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)}}-\frac{1}{a}$$

(da notare solo il cambio disegno rispetto alla (5)).

Passando allo studio di $F(t)$ si ha.

$F(t)$ è definita $\forall x\in\mathbb{R}$;

$F(t)$ è pari;

$$\lim_{t\to\pm\infty}F(t)=\lim_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)}}-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}$$

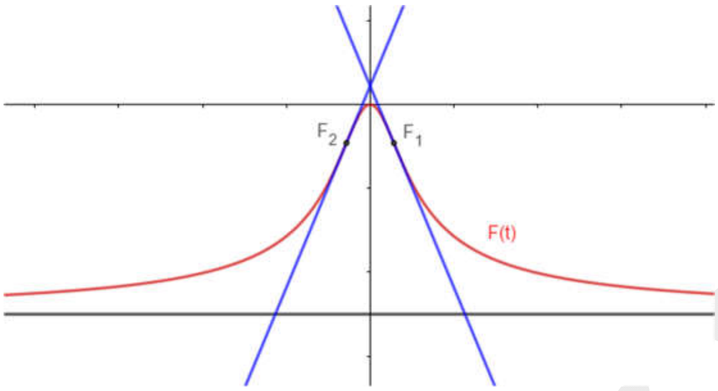
$F'(t)=f(t)=-\dfrac{t}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)^3}}$ $\quad F'(t)>0$ per $t<0$; segue che $F(t)$ ha massimo assoluto in $\left(0;0\right)$.

$$F''(t)=f'(t)=-\frac{\left(t^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}-3t^2\left(t^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(t^2+a^2\right)^3}=\frac{2t^2-a^2}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)^5}}$$

che si annulla per $t = \pm \frac{a}{2}\sqrt{2}$, punti di flesso per $F(t)$.

In tali punti la tangente inflessionale ha pendenza

$$m = f\left(\pm \frac{a}{2}\sqrt{2}\right) = \mp \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{2}+a^2\right)^3}} = \mp \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a^3 \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}} = \mp \frac{2\sqrt{3}}{9a^2}$$



4

$f(t) = F'(t)$ è dispari (derivata di una funzione pari),

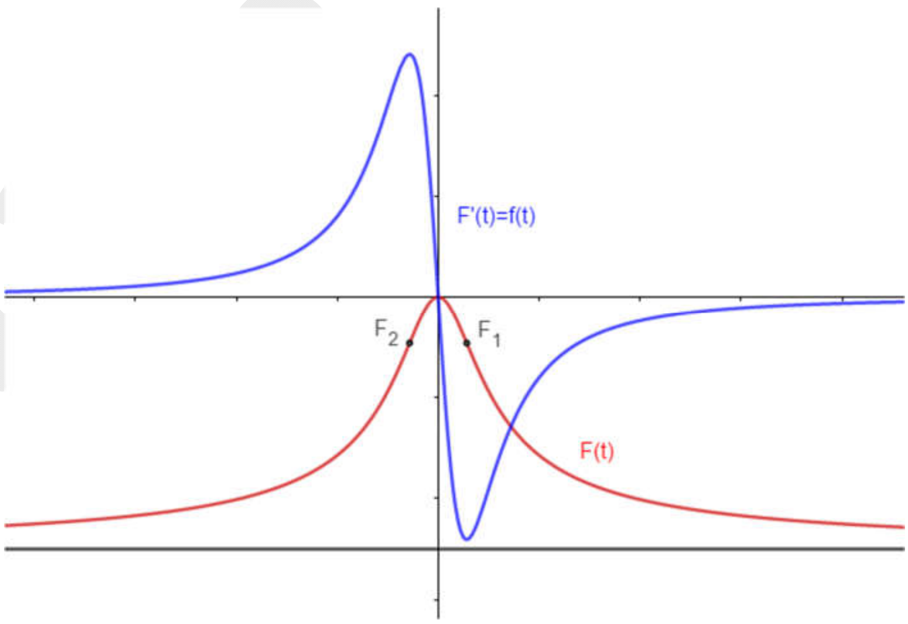
positiva per *t < 0* (dove $F(t)$ è crescente),

ha asintoto orizzontale *y = 0* (corrispondentemente all'asintoto orizzontale di $F(t)$;

si annulla per t = 0 (massimo di $F(t)$);

ha due punti estremi (relativi e assoluti) in corrispondenza dei punti di flesso di $F(t)$.

Il suo grafico qualitativo è pertanto il seguente:



L'area richiesta è data da:

$$S = 2\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{0} f(t)\,dt = 2\left|F(t)\right|_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{0} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)}} - \frac{1}{a}\right]_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{0} = \frac{2}{a}\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Infine, poiché $f(t)$ è dispari:

$$\int_{-b}^{b} f(t)\,dt = 0 \quad \forall b > 0$$

QUESITI

1

$p(x)$ è un polinomio di 2° grado, in quanto $f(x)$ ammette asintoto orizzontale. Poiché $f(x)$, quindi $p(x)$, si annulla in 0 e $\frac{12}{5}$, si ha:

$$p(x) = ax\left(x - \frac{12}{5}\right)$$

Dalla conoscenza degli asintoti verticale si deduce $d = -9$, mentre dall'asintoto orizzontale segue $a = 5$, pertanto:

$$f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + d} = \frac{5x\left(x - \frac{12}{5}\right)}{x^2 - 9} = \frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9}$$

Derivando rispetto a *x* si ottiene:

$$f'(x) = \frac{(10x - 12)(x^2 - 9) - 2x(5x^2 - 12x)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{6(2x^2 - 15x + 18)}{(x^2 - 9)^2}$$

che si annulla per $x = \frac{3}{2}$ e $x = 6$, punti di massimo e minimo relativi di $f(x)$.

2

Tutti i termini della somma sono potenze dispari, pertanto sono concordi; ne segue che $g(x_0) = 0$ se e solo se $x_0 = 0$.

$g(x)$ è un polinomio di grado 2019

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} \leq 1010x^{2019}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1,1^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{P_{2019}(x)}{1,1^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{P_{2019}(x)}{e^{x\ln 1,1}}$$

L'ultimo limite può essere calcolato applicando 2019 volte il teorema di de l'Hopital, ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2019}}{e^{x\ln 1,1}} = \ldots = \frac{2019!}{(\ln 1,1)^{2019}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

3

Indichiamo con *a* gli spigoli della base quadrata, con *b* gli altri spigoli del parallelepipedo.

Dobbiamo minimizzare la somma $s = 8a + 4b$ con la condizione $S = 2a^2 + 4ab = \text{costante}$.

Ricavando *b* dalla seconda equazione, $b = \frac{S - 2a^2}{4a}$, si ottiene:

$s=8a+4b=8a+4\dfrac{S-2a^2}{4a}=\dfrac{8a^2+S-2a^2}{a}=6a+\dfrac{S}{a}$

$s'=6-\dfrac{S}{a^2}>0$ per $a>\sqrt{\dfrac{S}{6}}$ (si considerano la sole soluzioni positive), per cui si ha il minimo per $a=\sqrt{\dfrac{S}{6}}$

Notiamo che $b=\dfrac{S-2\dfrac{S}{6}}{4\sqrt{\dfrac{S}{6}}}=\sqrt{\dfrac{S}{6}}$, quindi il parallelepipedo è un cubo.

4

Riscriviamo la condizione richiesta come:

$$\overline{PA}^2=2\overline{PB}^2$$

Considerando il punto generico dello spazio $P(x;y;z)$ si ottiene

$$(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=2\left[(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2\right]$$

Sviluppando i calcoli:

$$x^2+y^2+z^2+12x-8y-6z+13=0$$

che è l'equazione di una sfera di centro $C(-6;4;3)$ e raggio $r=4\sqrt{3}$ (sfera di Apollonio).

Per sostituzione diretta si verifica che il punto *T* appartiene alla sfera.

Il piano tangente in *T* a *S* ha la direzione del vettore $\overrightarrow{TC}$, ovvero

$$\overrightarrow{TC}=\vec{T}-\vec{C}=(-10;8;7)-(-6;4;3)=(-4;4;4) \quad \text{ovvero } (1;-1;-1)$$

$$(x+10)-(y-8)-(z-7)=0 \quad \Rightarrow \quad x-y-z+25=0$$

5

Il numero dei casi possibili è $N=6^4=1296$

a) la somma può assumere i valori:
4, ottenibile con la sola combinazione 1111

5, ottenibile come 2111 (4 casi in quanto il dado con la faccia 2 può essere uno qualunque); pertanto

$$P(s\le 5)=\frac{5}{1296}\cong 3{,}86\cdot 10^{-3}$$

b) Il prodotto dei numeri usciti è multiplo di 3 se e solo se almeno uno di essi è multiplo di 3, ovvero se tra le quattro uscite figura almeno un 3 o un 6.
Conviene considerare l'evento contrario (non esca nessun multiplo di 3 in nessun dado), ovvero:

la probabilità che nel singolo dado non esca un multiplo di 3 è $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; la probabilità che non esca in nessuno dei 4 dadi è $\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

Infine, la probabilità richiesta è:

$$P\left(p \text{ multiplo di } 3\right)=1-P\left(\overline{p \text{ multiplo di } 3}\right)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^4=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}\simeq 0,80$$

c) I casi favorevoli sono:

4444: 1 caso favorevole

444* dove * rappresenta una delle facce 1, 2, 3: $3\cdot 4=12$ casi favorevoli

44**: $3\cdot 3\cdot\binom{4}{2}=54$ casi favorevoli

4*** : $3\cdot 3\cdot 3\cdot\binom{4}{3}=108$ casi favorevoli

Pertanto

$$P\left(\max=4\right)=\frac{1+12+54+108}{1296}=\frac{175}{1296}\cong 0,135$$

6

Per la legge di Faraday-Lenz, la corrente indotta si oppone alla causa che la ha generata secondo la relazione:

$$i=-\frac{1}{R}\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}=-\frac{1}{R}\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{dt}=-\frac{S}{R}\frac{dB}{dt}$$

La corrente media è data da:

$$\bar{i}=-\frac{S}{R}\frac{\int_{t_1}^{t_2}\frac{dB}{dt}dt}{t_2-t_1}=-\frac{S}{R}\frac{\int_{t_1}^{t_2}dB}{t_2-t_1}=-\frac{S}{R}\frac{\left[B\left(T\right)-B\left(T\right)\right]}{t_2-t_1}$$

a) $$\bar{i}=-\frac{3,0\cdot 10^{-3}\ \text{m}^2}{4,0\cdot 10^{-3}\Omega}\frac{\left[-0,20\cdot 10^{-3}\ \text{T}-0\right]}{3,0\cdot 10^{-3}\ \text{s}}=0,050\ \text{A}=50\ \text{mA}$$

b) $$\bar{i}=-\frac{3,0\cdot 10^{-3}\ \text{m}^2}{4,0\cdot 10^{-3}\Omega}\frac{\left[0,20\cdot 10^{-3}\ \text{T}-\left(-0,20\cdot 10^{-3}\ \text{T}\right)\right]}{\left(5,0-3,0\right)\cdot 10^{-3}\ \text{s}}=0,150\ \text{A}=150\ \text{mA}$$

c) $$\bar{i} = -\frac{3,0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^2}{4,0\cdot 10^{-3}\Omega}\frac{\left[0-0,20\cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}\right]}{\left(10,0-5,0\right)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}} = 0,030\ \mathrm{A} = 30\ \mathrm{mA}$$

7

Nel sistema di laboratorio:

$$\bar{v} = \frac{0,25\ \mathrm{m}}{2,0\cdot 10^{-9}\mathrm{s}} = 1,25\cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s} = 0{,}42\ c$$

Nel sistema della navicella (*V* = 0,80 *c*):

$$\bar{v}' = \frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}} = \frac{0{,}42\ c - 0{,}80\ c}{1-\frac{\left(0{,}42\ c\right)\left(0{,}80\ c\right)}{c^2}} = -0,57\ c$$

In questo S.R. verrebbe misurato l'intervallo di tempo:

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-0,80^2}}\left(2,0\cdot 10^{-9}\mathrm{s} - \frac{0,80c}{c^2}0,25\,\mathrm{m}\right) = 2,2\cdot 10^{-9}\mathrm{s} = 2{,}2\ \mathrm{ns}$$

e lo spostamento (negativo in quanto la navicella è più veloce della particella)

$$\Delta s' = \gamma\left(\Delta s - V\Delta t\right) = \frac{0,25\ \mathrm{m} - 0,80\cdot 3,0\cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}\cdot 2,0\cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}}{\sqrt{1-0,80^2}} = -0,38\ \mathrm{m} = -38\ \mathrm{cm}$$

8

Indicando con v e ϑ rispettivamente la velocità del protone e l'angolo tra velocità e campo magnetico, il raggio dell'orbita è dato da:

$$r = \frac{m_p v \sin\vartheta}{eB}$$

Essendo il periodo orbitale

$T = \dfrac{2\pi r}{v\sin\vartheta} = \dfrac{2\pi m_p}{eB}$, il passo dell'elica risulta

$$P = \left(v\cos\vartheta\right)T = \frac{2\pi m_p}{eB}v\cos\vartheta$$

Dividendo membro a membro:

$$\frac{r}{P} = \frac{\tan\vartheta}{2\pi} \quad\Rightarrow\quad \vartheta = \arctan\left(2\pi\frac{r}{P}\right) = \arctan\left(2\pi\frac{10,5\ \mathrm{cm}}{38,1\ \mathrm{cm}}\right) = 60,0°$$ da cui infine:

$$v = \frac{eBr}{m_p\sin\vartheta} = \frac{1,602\cdot 10^{-19}\mathrm{C}\cdot 1,00\cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}\cdot 0,105\,\mathrm{m}}{1,673\cdot 10^{-27}\mathrm{kg}\cdot \sin 60,0°} = 1,16\cdot 10^{4}\,\mathrm{m/s}$$