**Simulazione ministeriale dell'Esame di Stato 2019_3 – Matematica e Fisica**

**Problema n. 1**

**1**

Il campo magnetico di un filo rettilineo infinito è espresso dalla legge di Biot-Savart

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Le linee di campo sono tangenti alla circonferenza con centro nel filo, dirette in senso antiorario per il filo che passa per l'origine (che indicheremo come filo 1, con corrente uscente), in senso orario per il filo che passa per D (filo 2, corrente entrante); nei punti dell'asse x entrambi i campi sono pertanto paralleli all'asse y e rivolti verso l'alto.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\hat{y} \quad \Rightarrow \quad B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

Dalla legge di Biot-Savart si ricava per la costante K

$$K = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad [K] = [B][L] \to \mathrm{T}\cdot\mathrm{m}$$

(si assume che *x* sia espresso in metri, come detto nell'intestazione).

Da considerazioni di simmetria, si può dedurre immediatamente che il minimo del campo magnetico si trova nel punto medio del segmento OD, ovvero per $x = \frac{1}{2}$; alternativamente lo si può dedurre analiticamente a partire dalla funzione $B(x)$ che esprime, in forma numerica, l'intensità campo magnetico, il minimo si ottiene annullandone la derivata prima:

$$B'(x) = K\frac{2x-1}{x^2(1-x)^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}$$

Come in precedenti prove ministeriali, si evidenzia l'opportunità di utilizzare il formalismo letterale anziché quello numerico per garantire la corretta dimensionalità delle grandezze fisiche, ovvero

$$B(x) = Ki\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) \quad \Rightarrow \quad B'(x) = Ki\frac{2x-d}{x^2(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{2}$$

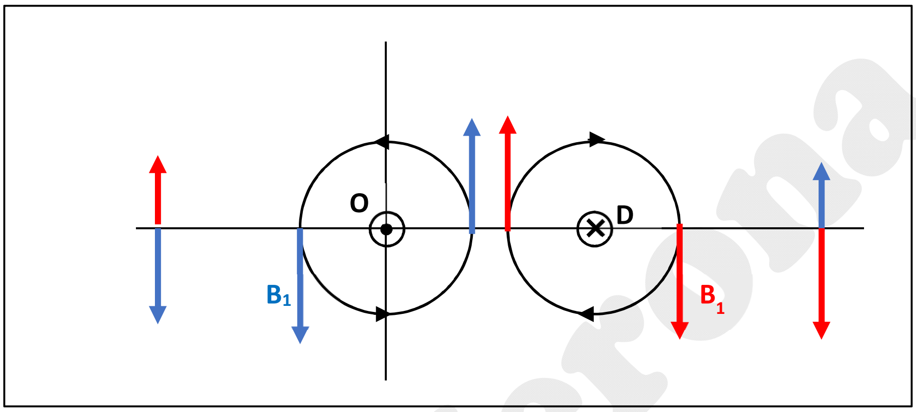
**2**

La carica risente la forza di Lorentz $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0$ in quanto i vettori velocità della carica e campo magnetico sono paralleli; poiché il campo B è diretto verticalmente lungo la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$, la carica si muove di moto rettilineo uniforme lungo la stessa retta.

Per lo studio del campo magnetico lungo l'asse *x,* notiamo preliminarmente che, per $x < 0$, il campo del filo 1 (riportato in blu nella figura successiva) ha la direzione $-\hat{y}$ (ovvero verso il basso), quello del filo 2 (in rosso) ha direzione $+\hat{y}$ (verso l'alto), $B(x)$ è ancora espresso dalla stessa funzione

$$B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

Infatti il primo addendo è negativo, il secondo positivo; $B(x)$ indica la componente del campo magnetico lungo l'asse *y* (il cui modulo coincide con l'intensità del campo).




Per $x > 1$ il campo del filo 1 ha direzione $+\hat{y}$, quello del filo 2 ha direzione $-\hat{y}$, si ha pertanto

$$B(x) = K\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

Ne segue che la funzione $B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{K}{x(1-x)}$ data esprime, con la convenzione di segno usuale, il campo $B(x)$ lungo l'intero asse x.

Dall'ultima relazione segue immediatamente che il campo non si annulla in nessun punto dell'asse *x*.

**3**

Rileviamo che la funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{K}{x(1-x)}$, definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$,è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = \frac{1}{2}$;

applicando la trasformazione che esprime la simmetria assiale rispetto a tale retta, si ha infatti:

$$\begin{cases} \frac{x+x'}{2} = \frac{1}{2} \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-x' \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow y' = f(x') = K\left(\frac{1}{1-x'} + \frac{1}{x'}\right) = f(x)$$

Si ha poi

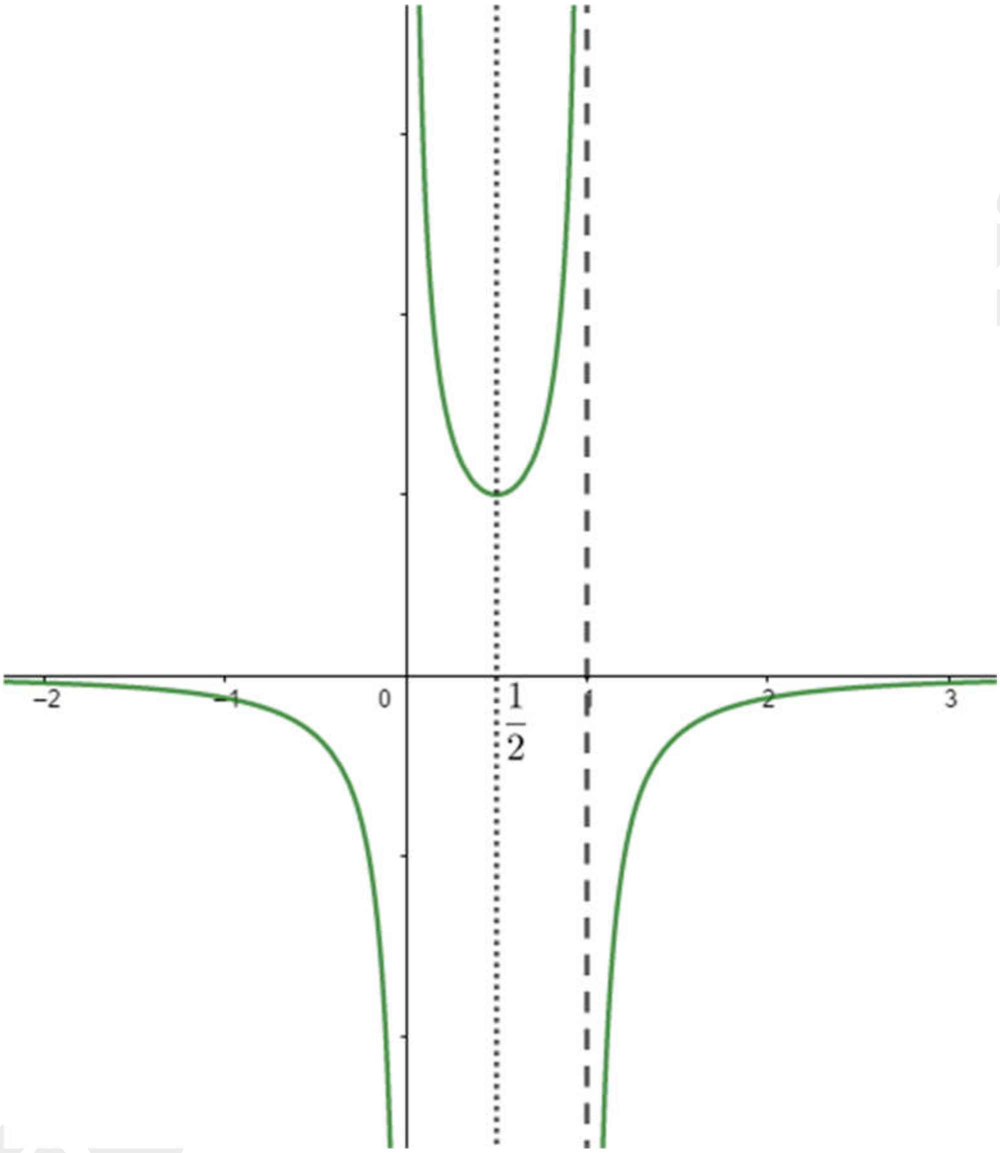
$$\lim_{x\to 0^{\mp}} f(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x\to 1^{\mp}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to \mp\infty} f(x) = 0^{-}$$

Per cui le rette di equazione $x = 0$ e $x = 1$ sono asintoti verticali per la funzione, l'asse *x* è asintoto orizzontale; derivando si ottiene

$$f'(x)=K\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\right)=K\frac{2x-1}{x^2(1-x)^2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)>0 \text{ per } x>\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=K\left(-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{(1-x)^3}\right)=2K\frac{3x^2-3x+1}{x^3(1-x)^3} \quad\Rightarrow\quad f'(x)>0 \;\; x\in\left]0;1\right[$$

F’’(x) non si annulla mai, per cui la curva non presenta punti di flesso




Il punto richiesto ha coordinate $P\left(\frac{1}{3};\frac{9}{2}K\right)$ e $f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{27}{4}K$, per cui la retta richiesta ha equazione

$$y-\frac{9}{2}K=-\frac{27}{4}K\left(x-\frac{1}{3}\right) \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{27}{4}Kx+\frac{27}{4}K=\frac{27}{4}K(-x+1)$$

Intersecando tale retta con la funzione, si ottiene

$$\frac{27}{4}K\left(-x+1\right)=\frac{K}{x\left(1-x\right)} \quad \Rightarrow \quad 27x^3-54x^2+27x-4=0$$

Poiché questa equazione ha una radice doppia per $x=\frac{1}{3}$, la si può ridurre, utilizzando l'algoritmo di Ruffini, alla forma

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\left(3x-4\right)=0$$

Per cui l'ulteriore punto di intersezione della retta con la curva ha coordinate $Q\left(\frac{4}{3};-\frac{9}{4}K\right)$

**4**

$$\int_{1/4}^{3/4} f\left(x\right)dx=K\int_{1/4}^{3/4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx=K\left|\ln|x|-\ln|1-x|\right|_{1/4}^{3/4}=K\left|\ln\left|\frac{x}{1-x}\right|\right|_{1/4}^{3/4}=K\left(\ln 3-\ln\frac{1}{3}\right)=2K\ln 3$$

Integrale che rappresenta l'area della regione finita di piano limitata dalla curva, dall'asse x e dalle rette di equazione $x=\frac{1}{4}$ e $x=\frac{3}{4}$

$$\int_{2}^{t}\left|f\left(x\right)\right|dx=K\int_{2}^{t}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=K\left|\ln|x-1|-\ln|x|\right|_{2}^{t}=K\left|\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right|_{2}^{t}=K\ln\left(2-\frac{2}{t}\right)$$

$$\lim_{t\to\mp\infty}\int_{2}^{t}\left|f\left(x\right)\right|dx=\lim_{t\to\mp\infty}K\ln\left(2-\frac{2}{t}\right)=K\ln 2$$

Valore che rappresenta l'area ella regione non limitata di piano compresa tra la curva, l'asse x e la retta di equazione $x=2$; tale regione, pur non essendo limitata, ha estensione finita in quanto la funzione $f\left(x\right)=K\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{K}{x\left(1-x\right)}$ si annulla, per con la rapidità della funzione $f_2\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}$

**Problema n. 2**

**1**

$f(x)=\sqrt{x}(k-x)$ è definita per $x\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

SI ha:

$f'(x)=\dfrac{k-3x}{2\sqrt{x}} \quad\Rightarrow\quad f'(x)>0$ per $0<x<\dfrac{k}{3}$ per cui $f(x)$ presenta un unico massimo nel punto di coordinate $F\left(\dfrac{k}{3};\dfrac{2k}{3}\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)$.

Si ha poi:

$g(x)=x^2(x-k)=x^3-kx^2$ è definita $\forall x\in\mathbb{R}$; segue che:

$$g'(x)=3x^2-2kx=x(3x-2k) \quad\Rightarrow\quad g'(x)>0 \text{ per } x<0\cup x>\frac{2}{3}k$$

$g(x)$ presenta un unico minimo nel punto di coordinate $G\left(\dfrac{2}{3}k;-\dfrac{4}{27}k^3\right)$.

Entrambi i punti appartengono all'intervallo $[0,k]$; le uguaglianze $x_G=2x_F$ e $y_G=-(y_F)^2$ sono di immediata verifica.

La dimostrazione è analoga qualora si consideri l'equilibrio di una carica negativa (in questo caso il campo elettrico dovrebbe essere uscente da tutti i punti della superficie).

**2**

La funzione $f(x)$ non è derivabile in x = 0 e si ha: $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{k-3x}{2\sqrt{x}}=+\infty$, ovvero il suo grafico ha come semitangente l'asse *y* positivo.

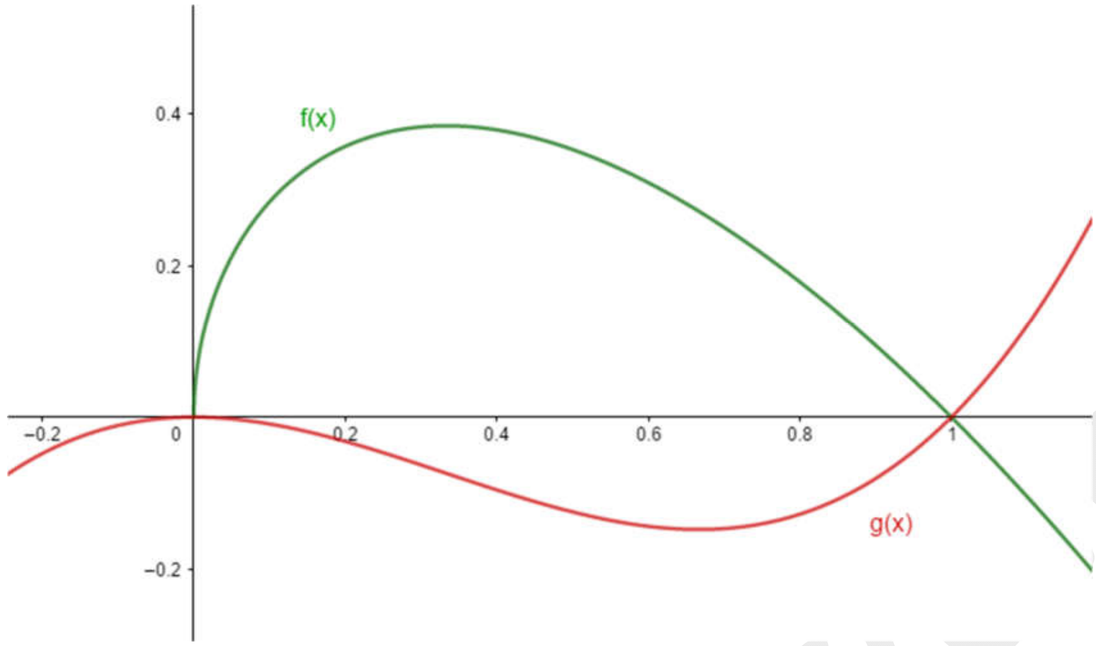
Essendo $g'(0)=0$, il grafico di tale funzione è invece tangente all'asse x, per cui i due grafici si intersecano ortogonalmente

Le due curve si intersecano per $\sqrt{x}(k-x)=x^2(x-k) \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x}(x-k)\left(x\sqrt{x}+1\right)$, ovvero per $x=0$ e $x=k$.

Perché i due grafici siano ortogonali anche in tale punto imponiamo che risulti:

$$f'(k)\cdot g'(k)=-1 \quad\Rightarrow\quad -\frac{k}{\sqrt{k}}\cdot k=-1 \quad\Rightarrow\quad k=1$$

Assumendo pertanto $f(x)=\sqrt{x}(1-x)$ e $g(x)=x^2(x-1)$, tracciamo i grafici delle due funzioni




**3**

Orientando la normale alla spira nella stessa direzione del campo magnetico B, si ottiene per il flusso

$$\Phi\left(\vec{B}\right)=B_0\int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)dx=B_0\int_0^1\left(\sqrt{x}\left(1-x\right)-x^2\left(x-1\right)\right)dx=B_0\int_0^1\left(-x^3+x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)dx=$$

$$=B_0\left|-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{7}{20}B_0$$

che, con i dati assegnati, risulta

$$\Phi\left(\vec{B}\right)=\frac{7}{20}\cdot 2{,}0\cdot 10^{-2}\ \mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2=7{,}0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Wb}$$

Non è possibile soprassedere sullo scarso realismo di una spira di forma siffatta e dimensioni dell'ordine del metro.

**4**

Per la legge di Faraday si ha:

$$i\left(t\right)=-\frac{1}{R}\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}=-\frac{7}{20}\frac{B_0}{R}\frac{d}{dt}\left(e^{-\omega t}\cos\left(\omega t\right)\right)=\frac{7}{20}\frac{B_0}{R}\omega\left(\cos\left(\omega t\right)+\sin\left(\omega t\right)\right)e^{-\omega t}$$

All'istante iniziale t = 0 si ha $i\left(0\right)=\frac{7}{20}\frac{B_0}{R}\omega e^{-\omega}>0$, per cui la corrente inizia a circolare nella spira in senso antiorario (supponendo che B sia uscente dal piano della pagina), in accordo alla legge di Lenz, in quanto l'intensità del campo magnetico, e conseguentemente del flusso di campo magnetico, sta diminuendo il campo magnetico.

La corrente si inverte quando

$$\cos(\omega t)+\sin(\omega t)=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}(\omega t)=-1 \quad \Rightarrow \quad \omega t=\frac{3}{4}\pi+N\pi,\ N\in\mathbb{N}$$

La prima inversione avviene pertanto all'istante $t=\frac{3}{4}s=0,75\ \mathrm{s}$.

Il modulo della corrente assume valore di massimo locale (consideriamo il modulo della corrente in quanto il verso non è significativo in questo contesto) nei punti in cui si annulla *i'(t)*, ovvero

$$\frac{d}{dt}i(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{7}{20}\frac{B_0}{R}\omega\left(\cos(\omega t)+\sin(\omega t)\right)e^{-\omega t}\right]=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{7}{10}\frac{B_0}{R}\omega^2\sin(\omega t)e^{-\omega t}=0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega t)=0 \quad \Rightarrow \quad \omega t=N\pi, \quad N\in\mathbb{N}$$

ovvero $t=N\ \mathrm{s},\ t=0,1,2\ \mathrm{s}....$

Poiché quando $\sin(\omega t)=0$ si ha $\cos(\omega t)=\pm 1$, il modulo della corrente in tali istanti vale

$$\left|i(t=N)\right|=\frac{7}{20}\frac{B_0}{R}\omega e^{-N\omega}$$

per cui il valore massimo della corrente si ha all'istante iniziale

QUESTIONARIO

**Quesito n. 1**

La funzione non ammette asintoti verticali se è prolungabile per continuità in x = 1, condizione che comporta

$$\left[(k-1)x^3+kx^2-3\right]_{x=1}=0 \quad \Rightarrow \quad 2k-4=0 \quad \Rightarrow \quad k=2$$

La funzione assume la forma

$$g_2(x)=\frac{x^3+2x^2-3}{x-1}=x^2+3x+3 \quad x\neq 1$$

Che individua una parabola con asse parallelo all'asse y, privata del punto di coordinate $(1;7)$

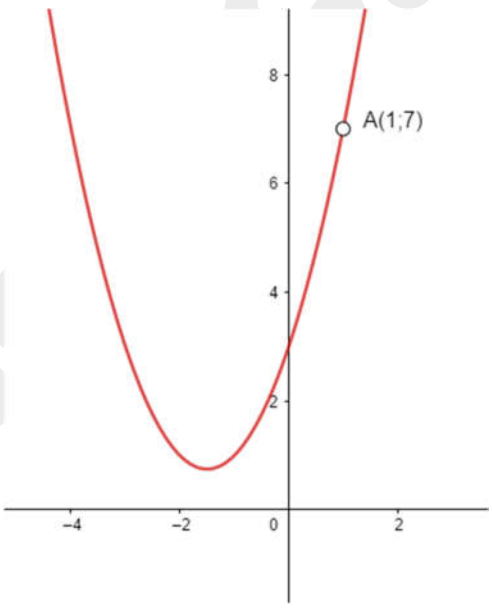
Perché ammetta asintoto obliquo, il numeratore deve essere un polinomio di 2° grado, per cui k = 1;

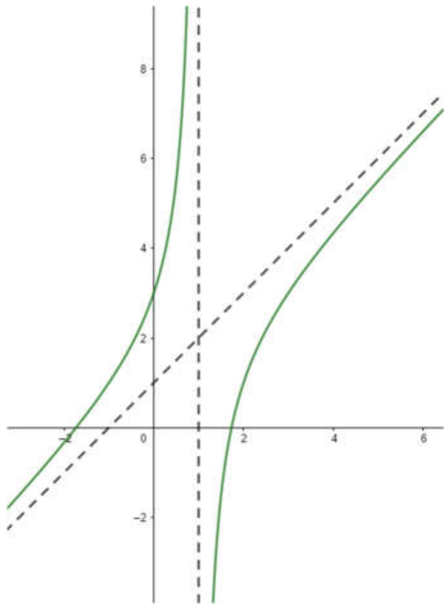
la funzione assume la forma $g_1(x)=\dfrac{x^2-3}{x-1}$

Per tracciarne il grafico, scriviamo $g_1(x)$ nella forma $g_1(x)=\dfrac{x^2-3}{x-1}=\dfrac{x^2-1-2}{x-1}=x+1-\dfrac{2}{x-1}$

Da cui si riconoscono immediatamente l'asintoto obliquo di equazione $y=x+1$ e quello verticale, di equazione $x=1$.

Osservando che $g_1(x)$ è una funzione razionale fratta di secondo grado, con due asintoti, il suo grafico è quello di un'iperbole, per cui può essere disegnata senza necessità di effettuarne uno studio completo; i due grafici sono rappresentati nelle figure seguenti



**Quesito n. 2**

Sia $f(x)$ pari, ovvero $f(x)=f(-x)$. Si ha:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}=f'(-x)$$

Per cui $f'(x)$ è dispari.

Analogamente, se $f(x)$ dispari, ovvero $f(x)=-f(-x)$, si ha:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-f(-x-h)+f(-x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}=f'(-x)$$

Per cui $f'(x)$ è pari. Come esempio basta prendere rispettivamente le funzioni $f(x)=x^2 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=2x$ e $f(x)=x^3 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2$

Si ha

$p'=4\left(1-e^{1-x}\right) \quad x\ge0$ ed essendo $p'=4\left(1-e^{1-x}\right)>0$ per $e^{1-x}<1 \quad\Rightarrow\quad x>1$, il rettangolo di area massima (quadrato) ha anche perimetro minimo.

**Quesito n. 3**

Essendo $f(1)=0$ e $f'(1)=\left.\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{x}\right|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$

Si ha immediatamente $y-f(1)=f'(1)\left(x-1\right) \quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

**Quesito n. 4**

Con l'usuale significato dei termini, l'equazione vettoriale della retta ab può scriversi:

$\vec{r}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ che, in forma parametrica, assume la forma

$$r:\begin{cases}x=-2+2t\\ y=2t\\ z=1\end{cases}$$

Indicato con $P\left(x;y;z\right)$ il generico punto di r, imponiamo che sia $\overline{PC}=\overline{PD}$, ovvero:

$$\left(7-2t\right)^2+\left(1-2t\right)^2+\left(-3\right)^2=\left(3-2t\right)^2+\left(3-2t\right)^2+\left(3\right)^2 \quad\Rightarrow\quad t=4$$

Il punto richiesto ha coordinate $P(6;8;1)$

**Quesito n. 5**

Dopo 4 lanci il punteggio è 0 se sono usciti, in qualunque ordine, una volta il numero 3 e 3 volte un numero diverso da 3; si ha pertanto:

a) $P_4(0) = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324} \simeq 0{,}386$

b) Il primo numero estratto deve essere 3 (probabilità 1/6); indicando con $\bar{3}$ un numero diverso da 3 (probabilità 5/6) e con * un numero qualunque (compreso 3, probabilità 1, le sequenze possibili, con le relative probabilità, sono:

$33{*}{*}{*}{*} \quad P = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 1^4 = \frac{1}{6^2}$

$3\bar{3}3{*}{*}{*} \quad P = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot 1^3 = \frac{5}{6^3}$

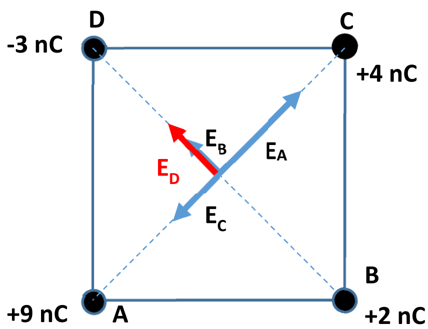
$3\bar{3}\bar{3}3{*}{*} \quad P = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 1^2 = \frac{5^2}{6^4}$

$3\bar{3}\bar{3}\bar{3}3{*} \quad P = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 1 = \frac{5^3}{6^5}$

La probabilità totale è la somma delle probabilità di queste sequenze, ovvero $P_6(p \geq 0) \simeq 0{,}086$

**Quesito n. 6**

La situazione è rappresentata nella figura a fianco; indicando con




$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, con $r = L\frac{\sqrt{2}}{2}$ la distanza tra il centro del quadrato e i vertici, con q = 1 nC la carica unitaria, con $E_0 = k\frac{q}{r^2}$,

$$E_A = 9E_0, \quad E_B = 2E_0, \quad E_C = 4E_0, \quad E_D = 2E_0,$$

Dalla configurazione geometrica si ha quindi:

$$E_A + E_C = 5E_0 \quad (dir.\,45°), \quad E_B + E_D = 5E_0 \; (dir.\,135°)$$

Il campo risultante è pertanto diretto in direzione verticale, verso l'alto (90°), e vale

$$\vec{E} = 5\sqrt{2}E_0\,\hat{y} = \frac{5\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\frac{L^2}{2}}\,\hat{y} = \frac{5\sqrt{2}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L^2}\,\hat{y} = \left(31{,}8\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}\right)\hat{y}$$

**Quesito n. 7**

La d.d.p accelera il protone ad una velocità tale che $\frac{1}{2}v^2 = \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2e\,\Delta V}{m_p}}$

La forza centripeta che determina il moto circolare del protone è data dalla forza di Lorentz; con la configurazione del testo si ha:

$$e\,v\,B = \frac{m_p v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{m_p v}{e\,r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2m_p\,\Delta V}{e}} = \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{m}}\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}673\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\cdot 400\ \mathrm{V}}{1{,}602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}} = 2{,}04\ \mathrm{mT}$$

**Quesito n. 8**

$$f.e.m. = -\frac{d}{dt}\Phi(B) = -\frac{d}{dt}\left[B_0 l^2\left(2+\mathrm{sen}\,\omega t\right)\right] = -B_0\omega l^2\cos\omega t$$

$$i = \frac{f.e.m.}{R} = -\frac{B_0\omega\, l^2\cos\omega t}{R}$$

a) $\quad P_a = \frac{1}{16}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{9}{16} = \frac{81}{4096} \simeq 0{,}020$