Simulazione ministeriale dell'Esame di Stato 2019_2 – Matematica e Fisica

Problema n. 1

1

Data la funzione $q(t) = at \cdot e^{bt}$ segue

$$q'(t) = ae^{bt}(1+bt)$$

Il cui segno è dato da

$$q'(t) = ae^{bt}(1+bt) > 0 \quad \Rightarrow \quad 1+bt > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t < -\frac{1}{b} & se\; b < 0 \\ \forall t \in \mathbb{R} & se\; b = 0 \\ t > -\frac{1}{b} & se\; b > 0 \end{cases}$$

Pertanto il punto di coordinate $\left(-\frac{1}{b}; -\frac{a}{eb}\right)$ è un punto di massimo per la funzione se *b <0* , è un punto di minimo se *b >* ; la funzione è sempre crescente se *b = 0*.

Perché il massimo coincida con il punto $B\left(2; \frac{8}{e}\right)$ si deve avere:

$$\begin{cases} -\frac{1}{b} = 2 \\ -\frac{a}{eb} = \frac{8}{e} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = 4 \end{cases}$$

2

Sia ora $q(t) = 4t \cdot e^{-\frac{t}{2}}$; si ha immediatamente

$$q'(t) = 4e^{-\frac{t}{2}}\left(1 - \frac{t}{2}\right) = 2e^{-\frac{t}{2}}(2-t)$$

$$q''(t) = 2e^{-\frac{t}{2}}\left[-\frac{1}{2}(2-t) - 1\right] = e^{-\frac{t}{2}}(t-4)$$

Il cui segno è data da:

$$q''(t) = e^{-\frac{t}{2}}(t-4) > 0 \quad \Rightarrow \quad t > 4 \text{ ed essendo} \qquad q(4) = \frac{16}{e^2}; \qquad q'(4) = -\frac{4}{e^2}$$

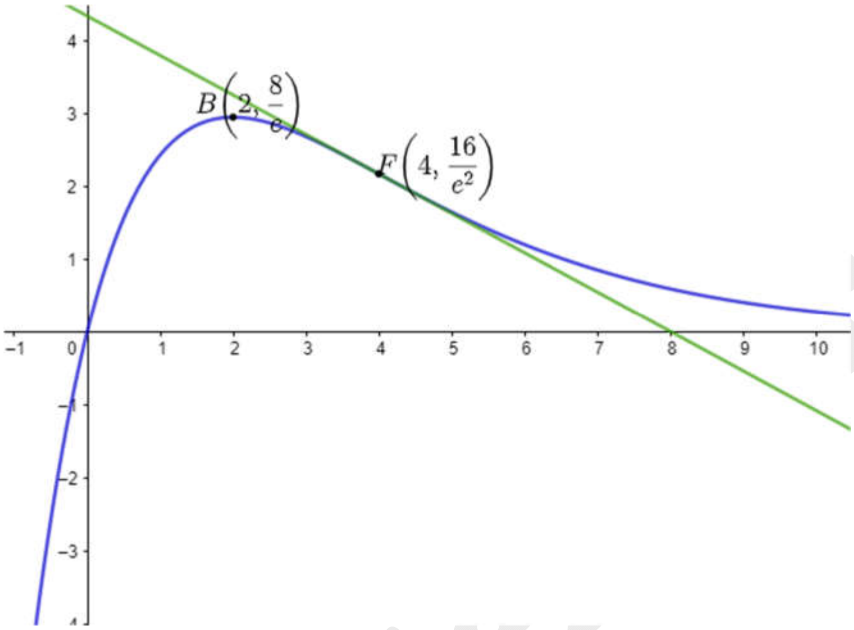
si conclude che il punto F di coordinate $F\left(4; \frac{16}{e^2}\right)$ è un punto di flesso, con tangente inflessionale di equazione

$$y - q(4) = q'(4)(x-4) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{4}{e^2}x + \frac{32}{e^2}$$

Per completare lo studio della funzione, calcoliamo i due limiti

$$\lim_{t\to-\infty} q(t) = \lim_{t\to-\infty} 4t\cdot e^{-\frac{t}{2}} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} q(t) = \lim_{t\to+\infty} 4t\cdot e^{-\frac{t}{2}} = 0^+$$

Possiamo pertanto disegnare il grafico della funzione, evidenziando la tangente nel punto di flesso



3

Il quesito presenta un grave errore di formulazione:

supponendo che la funzione q(t) rappresenti ... la carica elettrica ***che attraversa all'istante di tempo t la sezione*** *di un certo conduttore*

La carica che attraversa la sezione di un conduttore **in un istante** è evidentemente nulla; tale carica assumerebbe valore finito in un intervallo di tempo finito.

Il problema non può pertanto risolversi interpretando letteralmente il testo.

Per dare un senso alle domande successive, si può tentare di ipotizzare cosa intendessero gli estensori del testo; l'ipotesi più ragionevole, in base alla formulazione delle domande successive e del nome dato alle variabili, parrebbe quella di ipotizzare un condensatore la cui carica vari nel tempo secondo la legge *q(t)* assegnata; in questo caso la premessa del terzo punto andrebbe riscritta in questo modo:

supponendo che la funzione q(t) rappresenti ... la carica elettrica ***presente all'istante di tempo t sull'armatura di un condensatore*****.**

Un'altra possibilità, meno probabile per il nome assegnato alla funzione (che indurrebbe facilmente in errore) ma che renderebbe più interessante la domanda 4, potrebbe essere quella di intendere la funzione *q(t)* come la corrente istantanea nel circuito.

Proseguiamo la risoluzione del problema nella prima ipotesi, ovvero ***q(t)*** **rappresenti la carica sull'armatura di un condensatore**.

L'argomento dell'esponenziale è un numero puro, per cui $[b]=[t]^{-1} \to s^{-1}$

Essendo *q* una carica, $[a]=[q][t]^{-1}=[I]$ è una intensità di corrente, per cui si misura in ampere (o C/s).

Inserendo la dimensionalità delle grandezze, si ha:

$$a = 4A, b = -\frac{1}{2s} = -0,5\,s^{-1}$$

La corrente che attraversa il circuito è data dalla derivata rispetto al tempo della funzione *q(t)*.

Per motivare la scrittura dimensionale corretta, riproponiamo il calcolo della derivata inserendo le unità di misura:

$$q(t) = (4A)t \cdot e^{-\frac{t}{2s}} \quad \Rightarrow \quad i(t) = q'(t) = (4A) \cdot e^{-\frac{t}{2s}}\left(1 - \frac{t}{2s}\right) = 2e^{-\frac{t}{2s}}(2s - t)A \cdot s^{-1}$$

Il valore della corrente corrisponde geometricamente alla pendenza della tangente al grafico della funzione *q(t)*; si ha inoltre

$$i'(t) = q''(t) = e^{-\frac{t}{2s}}(t - 4s)A \cdot s^{-2}$$

Il punto di flesso (discendente) presente in *q(t)* corrisponde pertanto al minimo di *i(t)*, mentre il massimo si ha all'istante iniziale *t* = 0, ovvero:

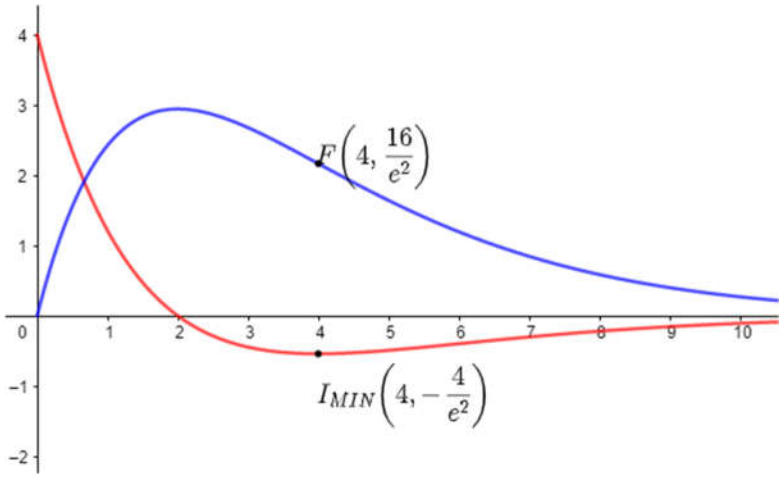
$$i_{MAX} = i(0) = 4A \cdot e^{-\frac{t}{2s}}\left(1 - \frac{t}{2s}\right) = 4A$$

$$i_{MIN} = i(4s) = -\frac{4}{e^2}A \approx -0,54A$$

Asintoticamente la corrente tende ad annullarsi, essendo:

$$\lim_{t \to +\infty} i(t) = \lim_{t \to +\infty} 2e^{-\frac{t}{2s}}(2s - t)A \cdot s^{-1} = 0$$

Riportiamo, in rosso, il grafico dell'andamento temporale della corrente, sovrapposto all'andamento della carica (in blu) per $t \geq 0$.



4

La corrente è positiva per $0 \leq t < 2\ s$ (il condensatore si sta caricando), si inverte per $t > 2\ s$ (il condensatore si scarica).

La carica totale che attraversa una sezione del circuito per $t_0 \to +\infty$ è data dalla differenza tra la carica finale (asintotica) e la carica iniziale sul condensatore; essendo entrambe nulle, è nulla anche la carica totale che attraversa qualunque sezione del conduttore.

L'energia dissipata nell'intervallo $\left[0, t_0\right]$ è dovuta all'effetto Joule, ovvero (omettiamo le unità di misura nella funzione integranda:

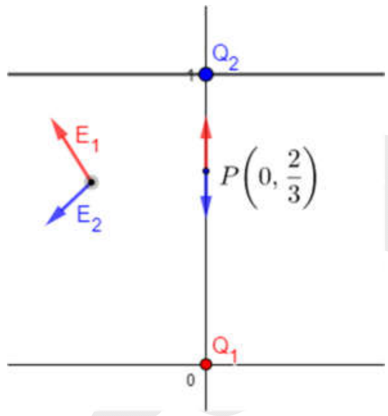
$$E_{diss} = \int_0^{t_0} W(t)\,dt = R\int_0^{t_0} i^2(t)\,dt = 3\int_0^{t_0}\left[2e^{-\frac{t}{2}}(2-t)\right]^2 dt = 12\int_0^{t_0} e^{-t}(2-t)^2\,dt$$

Problema n. 2

1

Indicati con $\mathbf{E_1}$ e $\mathbf{E_2}$ i campi elettrici generati dalle due cariche, si deve avere:

$$\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} = 0$$



pertanto il punto in cui il campo totale si annulla deve trovarsi sulla retta congiungente le due cariche; al di sotto di Q_1 i due campi sono entrambi diretti verso il basso, al di sopra di Q_2 entrambi verso l'alto, pertanto il punto di equilibrio è collocato tra le due cariche.

Indicata con $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, e con P (0, y), con 0 < y < 1 il punto generico del segmento compreso tra le due cariche, si ha:

$$k\frac{4q}{y^2} - k\frac{q}{(1-y)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4(1-y)^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2(1-y)$$

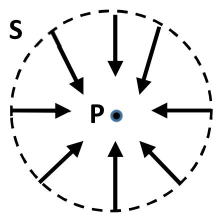
che ha soluzioni

$$y_1 = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad y_2 = 2 \quad (\textit{non accettabile})$$

L'unico punto è pertanto il punto $P\left(0;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

Evidenziamo che il testo assegna l'unità di misura della costante k ma omette quella di tutte le altre grandezze coinvolte.

Il punto P è di equilibrio instabile: cogliamo l'occasione per dimostrare che, per qualsiasi configurazione di cariche, in presenza di sole forze elettrostatiche non è possibile ottenere posizioni di equilibrio stabili.



Un punto di equilibrio stabile è un punto nel quale il campo è nullo e in un qualsiasi intorno del quale il campo esercita forze di richiamo su una carica.

Supponiamo per assurdo che tale punto esista (punto P nella figura a lato); ovviamente in tale punto non può esservi una delle cariche sorgenti (altrimenti il campo non sarebbe definito); se tale punto è di equilibrio stabile per una carica positiva, il campo elettrico in un intorno sferico S di P deve essere rivolto verso l'interno della superficie; considerando il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S si ha pertanto:

$\Phi_S(E) < 0$ in quanto il campo è entrante nella superficie in ogni suo punto

D'altra parte, per la legge di Gauss, non essendovi cariche all'interno della superficie, si deve avere

$$\Phi_S(E) = 0$$

ne segue che un punto con tali caratteristiche non esiste.

La dimostrazione è analoga qualora si consideri l'equilibrio di una carica negativa (in questo caso il campo elettrico dovrebbe essere uscente da tutti i punti della superficie).

2

$$U(x) = k\frac{Q_1Q_2}{r} = k\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

dove $r = \sqrt{1+x^2}$ è la distanza tra le due cariche

3

La funzione *U(x)* è definita $\forall x \in \mathbb{R}$; è pari (simmetrica rispetto all'asse y), sempre positiva.

Si ha poi:

$$U(0) = 4kq^2 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} U(x) = \lim_{x\to\pm\infty} k\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}} = 0^+$$

$$U'(x) = -k\frac{4q^2x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$ U(x) è crescente per x < 0

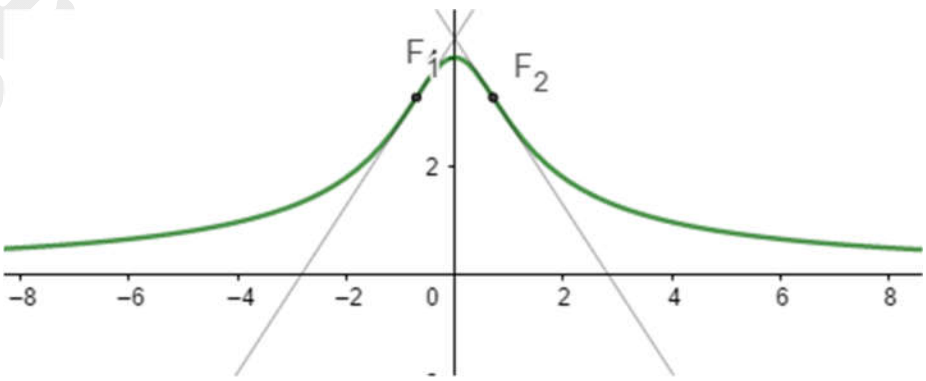
$$U''(x) = -4kq^2\left[\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x^2}{\left(1+x^2\right)^3}\right] = -4kq^2\frac{1+x^2-3x^2}{\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}}} = 4kq^2\frac{2x^2-1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Punti di flesso in $F_{1,2}\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{4\sqrt{6}}{3}kq^2\right)$ con tangenti inflessionali di pendenza

$$m_{1,2} = U'\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{8\sqrt{3}}{9}kq^2$$

Nella figura è rappresentato il grafico di *U(x)* (in unità kq^2 sull'asse *y*) con le due tangenti inflessionali di equazione

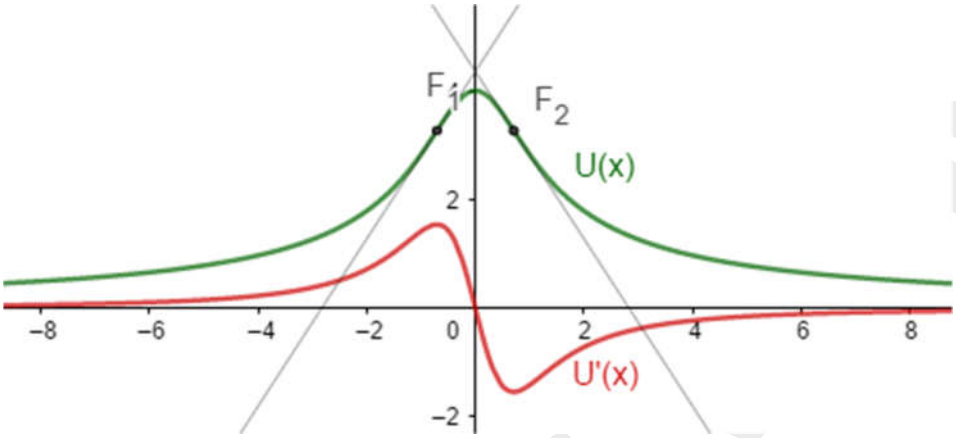
$$y = \mp\frac{8\sqrt{3}}{9}kq^2x + \frac{16\sqrt{6}}{9}kq^2$$



4

La funzione *U'(x)* è dispari (derivata di una funzione pari), quindi simmetrica rispetto all'origine, positiva per $x < 0$, dove *U(x)* è crescente, presenta massimo e minimo nei punti le cui ascisse corrispondono ai punti di flesso di *U(x);* massimo e minimo di *U'(x)* corrispondono alla pendenza delle due tangenti inflessionali.

Con queste considerazioni il grafico di *U'(x)* (in rosso) si ottiene immediatamente a partire dal grafico di *U(x)* (in verde)



Essendo *U'(x)* dispari, $\int_{-m}^{m} U'(x)\, dx = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

QUESTIONARIO

Quesito n. 1

Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ si ha:

$$g(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & per\ x\le 1 \\ \dfrac{b}{x-3} & per\ x>1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g'(x)=\begin{cases} -2ax & per\ x<1 \\ \dfrac{-b}{(x-3)^2} & per\ x>1 \end{cases}$$

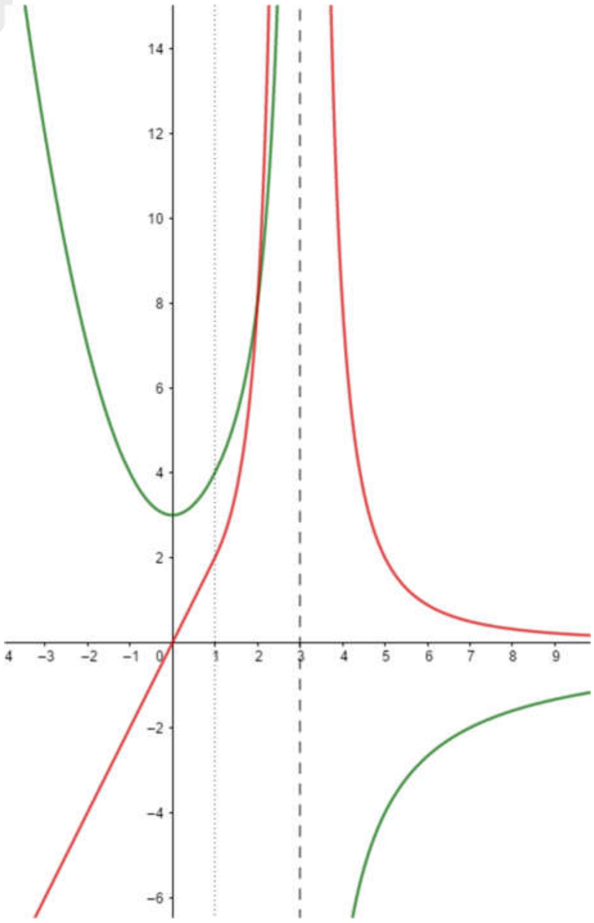
Imponendo le condizioni di continuità e derivabilità nel punto di ascissa 1 si ha:

$$\begin{cases} 3-a=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{b}{x-3} \\ \lim\limits_{x\to 1^-}(-2ax)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-b}{(x-3)^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3-a=-\dfrac{b}{2} \\ -2a=-\dfrac{b}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-8 \end{cases}$$

da cui

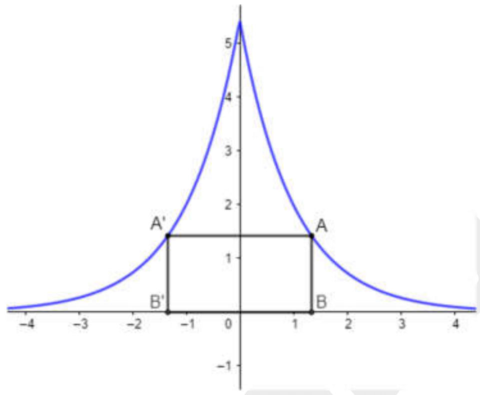
$$g(x)=\begin{cases} 3+x^2 & per\ x\le 1 \\ \dfrac{8}{3-x} & per\ x>1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g'(x)=\begin{cases} 2x & per\ x\le 1 \\ \dfrac{8}{(x-3)^2} & per\ x>1 \end{cases}$$

Il grafico di *g(x)*, in verde, è composto da due rami di funzioni note (parabola e funzione omografica), quello di *g'(x)* si deduce immediatamente dal primo; entrambe le funzioni *g(x)* e *g'(x)* presentano un asintoto verticale di equazione *x* = 3 e un asintoto orizzontale destro di equazione *y = 0* (asse *x*).



Quesito n. 2

La curva assegnata è simmetrica rispetto all’asse y.



Scelto il punto $A\left(x, 2e^{1-x}\right)$ con $x \geq 0$, per la superficie del rettangolo AA’B’B inscritto in *R* si ha:

$$S = 4xe^{1-x}$$

essendo $S' = 4e^{1-x}(1-x)$, l’area massima si ottiene per x = 1, per cui il punto A ha coordinate A (1; 2) e $\overline{AA'} = \overline{BB'} = 2$: il rettangolo è quindi un quadrato.

Il rettangolo di perimetro minimo si ottiene minimizzando la funzione

$$p = 2\left(2x + 2e^{1-x}\right) = 4\left(x + e^{1-x}\right) \quad x \geq 0$$

Si ha

$p' = 4\left(1 - e^{1-x}\right) \quad x \geq 0$ ed essendo $p' = 4\left(1 - e^{1-x}\right) > 0$ per $e^{1-x} < 1 \Rightarrow x > 1$, il rettangolo di area massima (quadrato) ha anche perimetro minimo.

Quesito n. 3

a) $P_a = \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{81}{4096} \simeq 0,020$

b) I casi possibili sono dati dal numero di raggruppamenti di 5 oggetti presi da un insieme di 16, ovvero $C_{16,5}$; i casi favorevoli sono tutti i gruppi che contengono il numero 13 e altri 4 numeri compresi tra 1 e 12, quindi $C_{12,4}$

$$P_b = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{16}{5}} = \frac{495}{4368} \simeq 0,113$$

Quesito n. 4

Una possibile funzione, per la quale *s(x)* e *t(x)* hanno grado minimo, è

$$y = \frac{a(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$$

infatti la funzione ha una radice semplice in *x* = -1 (ovvero il grafico è secante l’asse x) e una radice doppia in x = 2 (tangente all’asse *x*).

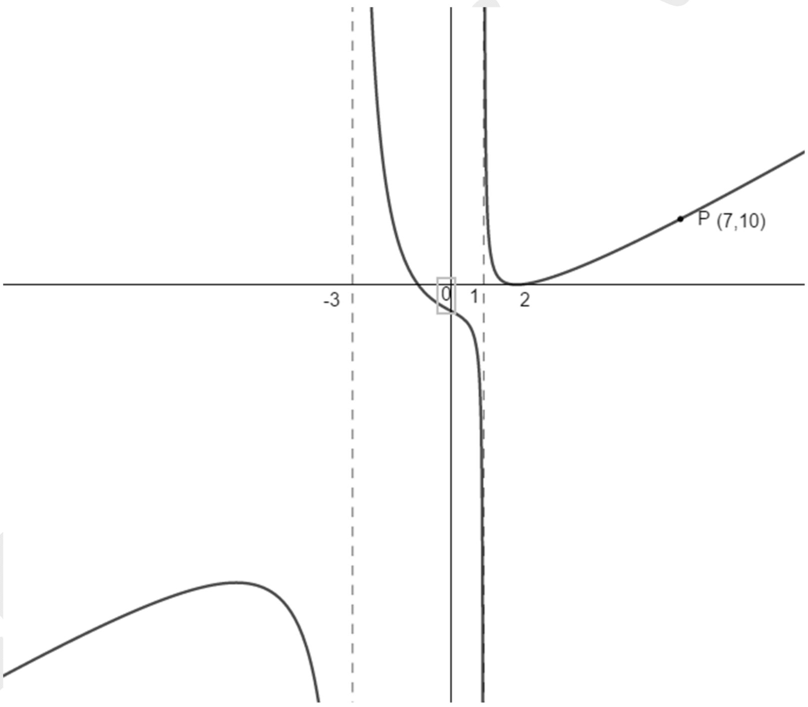
La funzione non è definita per *x* = 1 e x = -3; le rette *x* = 1 e *x* = 3 sono evidenti asintoti verticali; imponiamo infine il passaggio per P (7;10) ottenendo:

$$10 = a\frac{25\cdot 8}{10\cdot 6} \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

una possibile funzione è pertanto $y = \frac{3(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$

Per disegnare il grafico qualitativamente, ovvero senza calcolare le derivate della funzione, osserviamo ulteriormente che la funzione non presenta altri zeri oltre ai due indicati, cambia segno negli intorni di -3 e di 1, presenta un asintoto obliquo (essendo il rapporto tra un polinomio di terzo grado e uno di secondo) la cui pendenza è 3; si vede immediatamente che $y = \frac{3(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$, per x→∞ è un infinito del primo ordine con parte principale *3x.* Infine si ha *y(0)* = 4.

Il grafico è pertanto (è stata scelta una scala diversa tra asse x e asse y in modo da riuscire a mostrare l'intero grafico)



Quesito n. 5

Completando i quadrati nell'equazione della circonferenza si ottiene

$$\left(x^2-2x+1\right)+y^2+\left(z^2+6z+9\right)=1+9 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2+y^2+(z+3)^2=10$$

da cui segue: $C(1;0;-3)$ e $r=\sqrt{10}$.

Il centro dista dal piano: $D = \frac{|3x_C - 2y_C + 6z_C + 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{14}{7} = 2$

Essendo D < r sfera e piano si intersecano in una circonferenza di raggio $R = \sqrt{r^2 - D^2} = \sqrt{6}$

Quesito n. 6

Osserviamo che nella "legge oraria" vengono assegnate le dimensioni di x e t, ma quelle dei termini costanti, per cui la formulazione del quesito è decisamente deficitaria. Pur con tutte le riserve del caso, risolviamo il problema per via numerica.

La legge oraria è espressa da un polinomio di terzo grado in t, per cui non si tratta di un moto uniformemente accelerato; la verifica diretta porta alle equazioni

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{9} + \frac{4}{9}t$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{9}t + \frac{4}{9}$$

La velocità media è data da:

$\bar{v} = \frac{x(9) - x(0)}{9 - 0} = 5$ (con opportune costanti, si avrebbe $\bar{v} = 5\ m{\cdot}s^{-1}$)

Essendo $v(t) = \frac{t^2}{9} + \frac{4}{9}t = 5 \quad \Rightarrow \quad t^2 + 4t - 45 = 0$, la cui unica soluzione nell'intervallo $]0; 9\,s[$ è

t= 5 s.

Quesito n. 7

a)

Indicate con v_1 e v_2 le velocità delle due sfere dopo l'urto, imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia si ottiene:

$$\begin{cases} mv = mv_1 + 3mv_2 \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}3mv_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = v_1 + 3v_2 \\ v^2 = v_1^2 + 3v_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\frac{v}{2} \\ v_2 = \frac{v}{2} \end{cases}$$

Essendo $v_1 < 0$, il corpo 1 rimbalza all'indietro.
La seconda soluzione del sistema è data da $v_1 = v, v_2 = 0$, che corrisponde al *non urto* tra le due masse, soluzione banale in cui si conservano energia e quantità di moto, presente in tutti gli urti centrali elastici.

b)

I due corpi restano attaccati procedendo con velocità V; si conserva la sola quantità di moto, per cui

$$mv = (m+3m)V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{v}{4}$$

L'energia dissipata è data da:

$$E_{diss} = E_f - E_0 = \frac{1}{2}4m\left(\frac{v}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{3}{8}mv^2$$

Quesito n. 8

$$f.e.m. = -\frac{d}{dt}\Phi(B) = -\frac{d}{dt}\left[B_0 l^2\left(2+\operatorname{sen}\omega t\right)\right] = -B_0\omega l^2\cos\omega t$$

$$i = \frac{f.e.m.}{R} = -\frac{B_0\omega\, l^2\cos\omega t}{R}$$

Il segno – indica che la corrente circola nel verso opposto a quello convenzionalmente scelto positivo per la spira.

Le grandezze implicate hanno le seguenti unità di misura SI:

B → T (tesla) o Wb/m^2 (weber/m^2)

ω → [rad]·s^{-1}

t→ s

f.e.m. → V (volt)

Φ(B) → Wb (weber)

l→ m

i→ A (ampere)

R→ Ω (ohm)