

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

BRST – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE – Progetto “BROCCA”

Indirizzi: SCIENTIFICO – SCIENTIFICO TECNOLOGICO

Tema di: FISICA

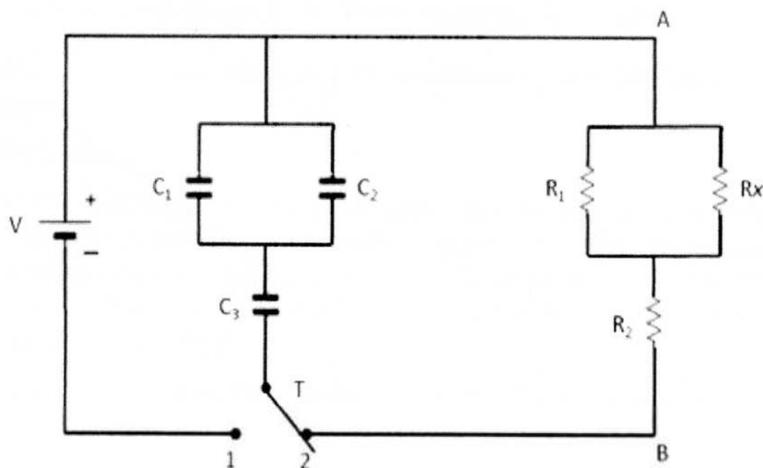
Secondo tema

Il candidato, dopo aver spiegato il concetto di capacità elettrica e il funzionamento di un condensatore, ne descriva i processi di carica e di scarica attraverso un resistore trattando, in particolare, le relazioni matematiche che regolano tali processi e le trasformazioni energetiche in gioco.

Risolve poi il problema che segue.

Nel circuito riportato in figura l'interruttore T può essere spostato nelle posizioni 1 e 2. Inizialmente T si trova nella posizione 1 e il sistema costituito dai tre condensatori di capacità $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C_2 = 14 \mu\text{F}$ e $C_3 = 8 \mu\text{F}$ è caricato da un generatore fino a raggiungere ai suoi capi la d.d.p. di 10 V. Successivamente, T è spostato nella posizione 2 e i condensatori si scaricano attraverso i tre resistori R_1 , R_2 , e R_x .

Conoscendo i valori delle resistenze $R_1 = 3 \text{ M}\Omega$ e $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$, il candidato calcoli il valore di R_x in modo che la differenza di potenziale ΔV_{AB} ai capi del sistema di resistori sia il 36,8% del suo valore massimo dopo 18 secondi dall'inizio del processo di scarica. Calcoli, inoltre, l'energia dissipata per effetto Joule dall'insieme dei tre resistori e, in particolare, quella dissipata dal resistore R_x .



Durata massima della prova: 6 ore.

E' consentito l'uso di tavole numeriche e della calcolatrice tascabile, non programmabile e grafica.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

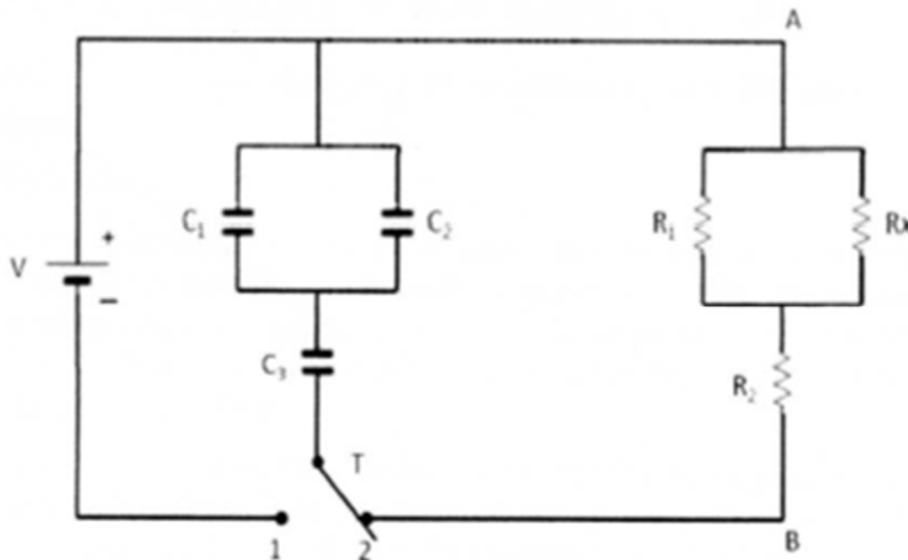
Secondo tema

Il candidato, dopo aver spiegato il concetto di capacità elettrica e il funzionamento di un condensatore, ne descriva i processi di carica e di scarica attraverso un resistore trattando, in particolare, le relazioni matematiche che regolano tali processi e le trasformazioni energetiche in gioco.

Risolva poi il problema che segue.

Nel circuito riportato in figura l'interruttore T può essere spostato nelle posizioni 1 e 2. Inizialmente T si trova nella posizione 1 e il sistema costituito dai tre condensatori di capacità $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C_2 = 14 \mu\text{F}$ e $C_3 = 8 \mu\text{F}$ è caricato da un generatore fino a raggiungere ai suoi capi la d.d.p. di 10 V. Successivamente, T è spostato nella posizione 2 e i condensatori si scaricano attraverso i tre resistori R_1 , R_2 , e R_x .

Conoscendo i valori delle resistenze $R_1 = 3 \text{ M}\Omega$ e $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$, il candidato calcoli il valore di R_x in modo che la differenza di potenziale ΔV_{AB} ai capi del sistema di resistori sia il 36,8% del suo valore massimo dopo 18 secondi dall'inizio del processo di scarica. Calcoli, inoltre, l'energia dissipata per effetto Joule dall'insieme dei tre resistori e, in particolare, quella dissipata dal resistore R_x .



Per *capacità* si intende un conduttore, o un sistema di conduttori, in grado di accumulare carica elettrica. Considerando ad esempio un sistema di due conduttori e spostando una carica Q da uno all'altro, tra i due si determina una d.d.p. ΔV (poiché ogni conduttore è una superficie equipotenziale, la d.d.p. tra di essi non dipende dai punti scelti).

Il rapporto tra la carica spostata (in valore assoluto) e la differenza di potenziale che viene a prodursi tra i due conduttori, o armature

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

individua la capacità del condensatore, grandezza che dipende solo dalla geometria (dimensioni e forma) del conduttore e dal dielettrico interposto, ma è indipendente dalla carica (essendo ΔV proporzionale a Q).

Nel caso di un condensatore piano, avente armature piane e parallele, di superficie S distanti d , nell'ipotesi che $d^2 \ll S$, condizione che permette di approssimare il campo come uniforme all'interno e nullo all'esterno del condensatore, si ha, con l'usuale significato dei simboli:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon} d} = \epsilon \frac{S}{d}$$

valore cui si riconducono altre geometrie nel limite di piccole distanze tra le armature.

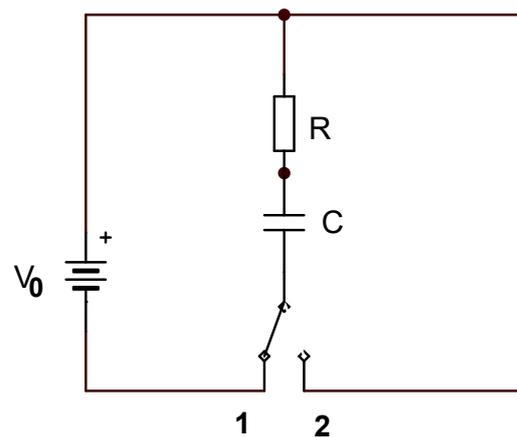
Il processo di carica e scarica può essere esaminato mediante il circuito riportato nella figura a lato.

In *fase di carica* (interruttore in posizione 1), l'equazione del circuito è:

$$V_0 - \frac{q}{C} = Ri \quad (1)$$

con

$$i = \frac{dq}{dt} \text{ e } q(t=0) = 0 \quad (2)$$



Dal momento che il testo propone di descrivere le relazioni matematiche relative al circuito, riportiamo per completezza la soluzione delle equazioni, pur rilevando che la loro deduzione esula dagli ordinari programmi scolastici.

Combinando la (1) e la (2) si ottiene:

$$V_0 - \frac{q}{C} = R \frac{dq}{dt} \quad (3)$$

da cui, separando le variabili e integrando:

$$\int_0^q \frac{dq}{CV_0 - q} = \int_0^t \frac{dt}{RC} \quad (4)$$

e infine:

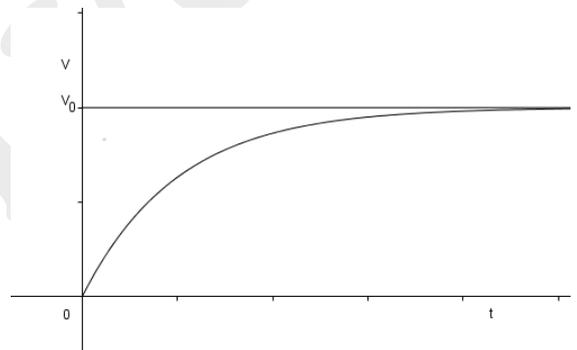
$$q = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = q_{MAX} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (5)$$

o, per gli sviluppi seguenti,

$$V = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (6)$$

dove $RC = \tau$ è la costante di tempo del circuito;
l'andamento del potenziale è riportato nella figura a lato.

In fase di scarica (interruttore in posizione 2) l'equazione del circuito diventa:



$$-\frac{q}{C} = R \frac{dq}{dt} \quad (7)$$

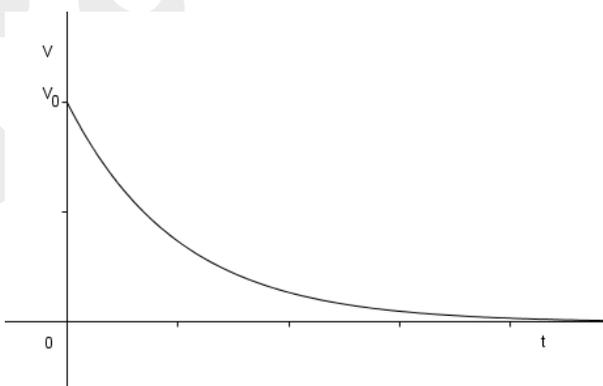
dalla quale, con passaggi analoghi ai precedenti, si ottiene

$$q = CV_0 e^{-\frac{t}{RC}} = q_{MAX} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8)$$

o, equivalentemente,

$$V = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (9)$$

il cui andamento è riportato nella figura successiva.



Per quanto concerne l'energia, in fase di carica si ha:

$$U_{condensatore} = \int_0^Q V(q) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \quad (10)$$

Se si carica completamente il condensatore, portandolo al potenziale del generatore V_0 , quest'ultimo eroga l'energia

$$U_{gen} = QV_0 \quad (11)$$

per cui il 50% dell'energia erogata dal generatore viene dissipata per effetto Joule sulla resistenza.

In fase di scarica, tutta l'energia del condensatore viene dissipata sulla resistenza; per calcolarne il valore, è sufficiente determinare la variazione di energia del condensatore:

$$|U_{diss}| = U(0) - U(t) \quad (12)$$

PROBLEMA

L'uso delle cifre significative è, come in altre prove di esame, imbarazzante: la prima richiesta prevede infatti 3 cifre significative, mentre resistenze e condensatori sono fornite con una o due cifre significative. Scegliamo di assumere 3 cifre significative anche nei dati, ovvero come se avessimo, ad esempio, $R_1 = 3,00 \text{ M}\Omega$.

La capacità risultante del sistema di tre condensatori (C_3 in serie con il parallelo di C_1 e C_2) è:

$$C = \left(\frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1} = 6,00 \mu F$$

dall'eq. (9), indicando con R la resistenza equivalente del sistema, segue ($T = 18,0 \text{ s}$):

$$V = 0,368 V_0 = V_0 e^{-\frac{T}{RC}}$$

da cui,

$$R = -\frac{T}{C \ln 0,368} = 3,00 \text{ M}\Omega$$

La resistenza risultante (R_2 in serie con il parallelo di R_1 e R_X) è:

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_X} \right)^{-1} + R_2$$

da cui

$$R_X = \left(\frac{1}{R - R_2} - \frac{1}{R_1} \right)^{-1} = 6,00 \text{ M}\Omega$$

L'energia complessivamente dissipata dal sistema di resistenze segue dalla (12):

$$|U_{diss}| = U(0) - U(t) = \frac{1}{2} C (V_0^2 - V^2) = \frac{1}{2} C V_0^2 (1 - 0,368^2) = 2,59 \cdot 10^{-4} J$$

Indicata con $i = i_2$ la corrente nel circuito in fase di scarica, essendo $R_X = 2R_1$ si ha immediatamente

$$i_1 = \frac{2}{3} i \quad e \quad i_X = \frac{1}{3} i$$

da cui segue, per la potenza istantanea dissipata, con l'usuale significato dei simboli:

$$\frac{W_X}{W_{TOT}} = \frac{R_X i_X^2}{R i^2} \Rightarrow W_X = \frac{R_X}{R} \left(\frac{i_X}{i} \right)^2 W_{TOT} = \frac{1}{9} \frac{R_X}{R} W_{TOT}$$

e, passando all'energia:

$$U_X = \frac{1}{9} \frac{R_X}{R} U_{TOT} = 5,76 \cdot 10^{-5} J$$