



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

BRST – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE – Progetto “BROCCA”

Indirizzi: SCIENTIFICO - SCIENTIFICO TECNOLOGICO

Tema di: FISICA

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica e alle cifre significative e unità di misura nella presentazione dei risultati numerici.

Primo tema

Nel 1897, dopo oltre sessanta anni dai primi esperimenti di Faraday, modificando la traiettoria dei raggi catodici con campi magnetici, Sir Joseph John Thomson dimostrò che essi erano costituiti da particelle materiali cariche negativamente e per ogni particella riuscì a calcolare il rapporto tra la carica e la massa. Egli chiamò queste particelle *elettroni*.

Il candidato risponda ai seguenti quesiti.

1. Descrivere l'interpretazione ondulatoria del comportamento dell'elettrone, secondo l'ipotesi di Louis De Broglie.
2. Spiegare i concetti fondamentali della meccanica ondulatoria, soffermandosi in particolare sull'interpretazione probabilistica delle funzioni d'onda e sul principio d'indeterminazione.
3. Spiegare il significato dell'espressione “dualismo onda corpuscolo”.

Risolva, infine, il seguente problema.

Una cella fotoelettrica emette elettroni, essendo illuminata con una luce di lunghezza d'onda $\lambda = 500$ nm. Sapendo che il lavoro di estrazione della placca fotosensibile è di 2,1 eV, calcolare la minima lunghezza d'onda di de Broglie associata agli elettroni emessi.

Si ricordano i seguenti dati approssimati:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \quad m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; \quad h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}; \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Trascrizione ai fini dell'accessibilità

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE – Progetto “Brocca”
Indirizzi: SCIENTIFICO – SCIENTIFICO TECNOLOGICO
Tema di FISICA

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica, delle cifre significative e delle unità di misura nella presentazione dei risultati numerici

Primo tema

Nel 1897, dopo oltre sessanta anni dai primi esperimenti di Faraday, modificando la traiettoria dei raggi catodici con campi magnetici, Sir Joseph John Thomson dimostrò che essi erano costituiti da particelle materiali cariche negativamente e per ogni particella riuscì a calcolare il rapporto tra la carica e la massa. Egli chiamò queste particelle *elettroni*.

Il candidato risponda ai seguenti quesiti.

1. Descrivere l'interpretazione ondulatoria del comportamento dell'elettrone, secondo l'ipotesi di Louis De Broglie.
2. Spiegare i concetti fondamentali della meccanica ondulatoria, soffermandosi in particolare sull'interpretazione probabilistica delle funzioni d'onda e sul principio d'indeterminazione.
3. Spiegare il significato dell'espressione “dualismo onda corpuscolo”.

Risolva, infine, il seguente problema.

Una cella fotoelettrica emette elettroni, essendo illuminata con una luce di lunghezza d'onda $\lambda = 500$ nm. Sapendo che il lavoro di estrazione della placca fotosensibile è di 2,1 eV, calcolare la minima lunghezza d'onda di de Broglie associata agli elettroni emessi.

Si ricordano i seguenti dati approssimati:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \quad m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; \quad h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

L'analisi dell'effetto fotoelettrico, pubblicata da Einstein nel 1905, porta ad attribuire alla luce, al livello microscopico, una caratteristica corpuscolare, cosicché la radiazione elettromagnetica, di cui la luce è una manifestazione, viene ad assumere una duplice natura ondulatoria (stabilita per la prima volta dall'esperimento di Young del 1800) e corpuscolare.

Con l'usuale significato dei simboli, ad un quanto di luce, successivamente chiamato fotone, viene attribuita l'energia

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Energia e impulso della radiazione elettromagnetica sono legate dalla relazione, deducibile sia dalle equazioni di Maxwell che dalla relatività ristretta $E = cp$, da cui:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = cp \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$

Louis de Broglie, fisico teorico, basandosi su un'ipotesi di simmetria, che in definitiva è un aspetto estetico della fisica, propose nel 1924 di estendere tale relazione anche a sistemi considerati classicamente corpuscolari, primo tra tutti l'elettrone, affermando che non solo la luce, ma anche la materia ordinaria, presenta una duplice natura, ondulatoria e corpuscolare.

L'unico elemento sperimentale a supporto dell'idea di de Broglie era costituito, all'epoca della formulazione del principio, dal modello atomico di Bohr (1913) il quale, per spiegare l'esistenza degli spettri atomici (discreti) e, in definitiva, la stessa esistenza in forma stabile degli atomi, avanzò l'ipotesi della quantizzazione del momento angolare il momento angolare degli elettroni atomici secondo la relazione:

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

L'ipotesi di de Broglie consente di motivare l'assunzione di Bohr: trattando l'elettrone come un'onda in uno spazio finito, questa può esistere solo se, come nel caso delle onde stazionarie lungo una corda, è in grado di interferire costruttivamente con se stessa; nel caso di orbite elettroniche circolari, trattate dal modello di Bohr, si ha:

$$n\lambda = n \frac{h}{p} = 2\pi r \Rightarrow r p = m_e v r = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

L'aspetto ondulatorio della materia verrà successivamente verificata con misure dirette, in particolare si possono citare l'esperimento delle due fenditure (alla Young) prima con un fascio, quindi con singoli elettroni, e l'esperimento di diffrazione di elettroni su cristallo (Davisson-

Germer, 1927), che mostra una figura qualitativamente analoga a quella ottenuta dalla diffrazione di raggi X.

2

La meccanica ondulatoria è una delle due formulazioni della meccanica quantistica, elaborata da Erwin Schroedinger nel 1926; l'altra formulazione, nota come meccanica delle matrici, era stata pubblicata l'anno precedente da Werner Heisenberg, su basi teoriche e con un formalismo matematico alternativo; nel 1927 Paul Dirac dimostrò l'equivalenza delle due teorie.

Fondamento della meccanica ondulatoria è il concetto di *stato*, che definisce completamente un sistema fisico, ed è descritto da una funzione d'onda a valori complessi $\Psi(x, t)$. L'evoluzione della funzione d'onda è regolata dall'equazione di Schroedinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

dove H è un operatore che contiene le informazioni sulle specifiche interazioni del sistema; da evidenziare il fatto che l'equazione di Schroedinger è un'equazione differenziale del primo ordine (ovvero contiene soltanto la derivata prima della funzione d'onda), quindi richiede per la risoluzione esclusivamente una condizione iniziale (la configurazione iniziale dello stato) a differenza, ad esempio, dell'equazione di Newton che, essendo del secondo ordine, ne richiede due (tipicamente, posizione e velocità iniziale del corpo considerato).

Lo stesso Schroedinger non seppe dare una precisa interpretazione fisica della funzione d'onda, pensata inizialmente come un'onda di materia, ipotesi subito abbandonata. Fu Max Born a proporre, nel 1926, l'interpretazione probabilistica, attualmente accettata: il quadrato del modulo della funzione d'onda $\Psi(x, t)$ determina la probabilità di trovare la particella nel punto x all'istante t , ovvero:

$$|\Psi(x, t)|^2 = P(x, t)$$

La funzione d'onda è ovviamente normalizzata in modo da avere, per un sistema unidimensionale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

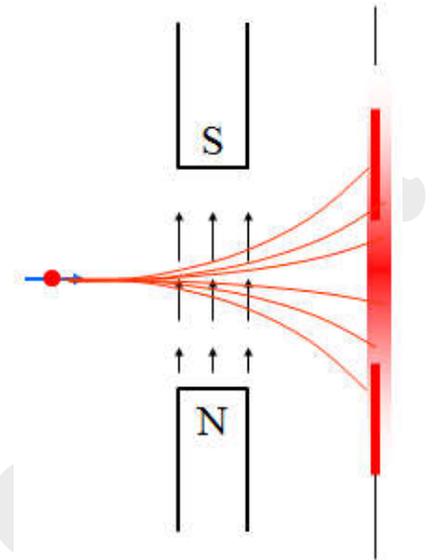
e analogamente, per un sistema esteso nello spazio:

$$\int_{\text{spazio}} |\Psi(\vec{x}, t)|^2 dV = 1$$

L'interpretazione probabilistica porta a rivedere alcuni elementi propri della meccanica classica, quali il concetto di posizione, impulso, traiettoria: non è quantisticamente possibile pensare ad una particella localizzata, in un determinato istante, in un preciso punto dello spazio: questa ha infatti soltanto una probabilità più o meno grande di trovarvisi, ed è solo la misura - che assume

un'importanza specifica in meccanica quantistica - che *riduce* la funzione d'onda ad uno dei suoi possibili valori, facendo trovare o meno la particella nel punto considerato.

Le prove sperimentali sono enormi: tra le prime e più significative citiamo l'esperimento di Stern-Gerlach (del 1922, quindi precedente alla formulazione della meccanica quantistica, ma che solo in essa ha trovato spiegazione) ovvero la deflessione di un fascio di ioni di argento aventi momento magnetico polarizzato in direzione orizzontale, provocata da un campo magnetico disomogeneo in direzione verticale (v. figura); la fisica classica prevederebbe di rilevare gli ioni entro un intervallo continuo; l'esperimento mostra invece solo due tracce, corrispondenti a due possibili polarizzazioni delle particelle: verso l'alto e verso il basso.



Ai fini della nostra trattazione, l'esperimento di Stern-Gerlach è importante in quanto mostra, oltre alla quantizzazione del momento magnetico, l'imprevedibilità della deviazione subita dalla singola particella, che è pertanto da ritenersi puramente casuale; l'interpretazione statistica sull'intero fascio, quindi su un gran numero di particelle, porta invece a prevedere, correttamente, che metà di esse saranno deviate verso l'alto e metà verso il basso.

Riprenderemo brevemente la discussione sulla probabilità dopo aver introdotto le *relazioni di indeterminazione* di Heisenberg (1927) (questa espressione è oggi preferita a *principio di indeterminazione*).

Heisenberg dimostrò che non è possibile determinare, con precisione arbitraria, alcune coppie di grandezze fisiche, quali ad esempio posizione e impulso, ovvero:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

L'interpretazione originale di tali relazioni, presto abbandonata, è quella cosiddetta *a disturbo*: per *osservare* una particella è necessario rilevare la deflessione di almeno un fotone incidente su di essa; tuttavia il fotone le trasferisce energia e impulso (effetto Compton) distruggendo il sistema. Poiché l'ordine di grandezza della precisione della localizzazione spaziale è data dalla lunghezza d'onda del fotone, aumentare la precisione comporta utilizzare fotoni di piccola lunghezza d'onda i quali però hanno grande impulso ($p = h/\lambda$); viceversa, perturbare poco il sistema comporta inviare fotoni di bassa energia, quindi di grande lunghezza d'onda. L'analisi quantitativa porta alla relazione di Heisenberg.

È da rilevare che tale relazione scaturisce dal formalismo ondulatorio (disuguaglianze analoghe sono note anche in ottica classica con il nome di *relazioni di dispersione*), per cui non si può propriamente parlare di principio.

Da questa prima interpretazione dell'indeterminazione si conclude che, mentre in meccanica classica è almeno teoricamente possibile pensare ad una misura perfetta, impossibile da realizzare solo per questioni pratiche, questa è invece anche concettualmente proibita in meccanica quantistica.

Questa interpretazione non è stata tuttavia accolta nella cosiddetta *interpretazione ortodossa* o di *Copenhagen* della meccanica quantistica, nella quale si afferma invece che l'indeterminazione non è un limite teorico alle possibilità di misura, bensì è intrinsecamente propria di ogni sistema fisico; a sostegno di questa lettura si può citare il celebre esperimento delle due fenditure (alla Young) condotto con fasci di elettroni e, successivamente, con singoli elettroni o fotoni, esperimento cruciale per la comprensione della meccanica quantistica.

Strettamente legata all'interpretazione dell'indeterminazione vi è una delle domande più intriganti sulla meccanica quantistica, che ha determinato un dibattito epistemologico tuttora aperto sui fondamenti della teoria stessa e concerne il significato delle probabilità quantistiche, che possono essere di natura *epistemica* (ovvero legate alla possibilità di conoscenza) o *non epistemica* (proprie del sistema stesso).

Un esempio di probabilità epistemica è costituito dalla termodinamica: un gas perfetto è descritto secondo un modello corpuscolare classico, nel quale il moto di ogni particella è regolato dalle leggi di Newton, quindi strettamente deterministico: è solo la complessità del sistema ad imporre un approccio di tipo statistico. Ci si è chiesti se le cose stiano in questo modo anche per le probabilità quantistiche: i sostenitori di questa posizione, tra i quali Schroedinger, Planck ed Einstein, ritenevano che la meccanica quantistica, fosse una teoria di tipo statistico, fondamentale incompleta in quanto incapace di descrivere l'evoluzione di un sistema elementare. Nella seconda metà del XX secolo notevoli sviluppi teorici e sperimentali (teoria di Bell e esperimento di Aspect) hanno però permesso di suffragare la natura non epistemica delle probabilità, ovvero di un comportamento aleatorio intrinsecamente insito nella natura stessa.

3

Il significato dell'espressione *dualismo onda corpuscolo*, è già emersa al punto 1, ovvero luce e corpi "materiali" possono manifestare, in base al tipo di osservazione svolta, un aspetto ondulatorio o corpuscolare. Il principio di complementarità di Bohr, criticato dagli epistemologi perché essenzialmente privo di significato conoscitivo, afferma che i due aspetti non si manifestano mai simultaneamente. Come sostegno sperimentale si può citare ancora una volta l'esperimento delle due fenditure, condotto con un singolo elettrone (o fotone) alla volta: l'esperimento mostra una inequivocabile figura di interferenza, come se l'elettrone (o il fotone) passasse da entrambe le fenditure, manifestando cioè un aspetto ondulatorio e impedendo quindi di pensare ad una traiettoria descritta da esso. Se però si colloca un rivelatore dietro alle due fenditure, questo mostra che l'elettrone passa soltanto da una delle due: la misura distrugge però l'interferenza, portando ad ottenere una localizzazione delle particelle, che ora si comportano in tutto e per tutto come tali, determinando un accumulo delle stesse in corrispondenza delle due fenditure.

Problema

Prima di affrontare la risoluzione, è necessario esprimere una netta critica al modo in cui sono presentati i dati, in particolare le costanti fisiche (indicate come *dati approssimati*), scritte con due o addirittura con una sola cifra significativa. Ciò porterebbe ad imporre tale approssimazione, assolutamente immotivata vista la precisione con la quale sono note tali costanti, a tutti i calcoli successivi. La cosa è aggravata dal fatto che tale imprecisione era presente anche nei precedenti temi di esame. Nello svolgimento dell'esercizio verranno in prima istanza considerate, come d'uso ad esempio nelle olimpiadi della Fisica, le grandezze con precisione non inferiore all'1%.

Calcoliamo preliminarmente l'energia del fotone:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 3.97 \cdot 10^{-19} J = 2.48 eV \ll m_e c^2$$

Valore che consente di utilizzare, come del resto sempre nell'ambito dell'effetto fotoelettrico, il formalismo classico per quanto riguarda l'elettrone.

L'energia del fotone in eccesso rispetto all'energia di estrazione dell'elettrone si ritrova sotto forma di energia cinetica dello stesso:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = eV_0 + \frac{p^2}{2m_e}$$

da cui si ricava la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e \left(\frac{hc}{\lambda} - eV_0 \right)}} = 1.98 \text{ nm} \rightarrow 2 \text{ nm}$$

La lunghezza d'onda *minima*, richiesta dal testo, implica che l'energia in eccesso del fotone si trasformi in energia cinetica dell'elettrone; in un caso reale si otterrà una dispersione delle velocità dell'elettrone, e conseguentemente delle lunghezze a causa delle dispersioni di energia nel reticolo metallico.