Pag. 2/2
N° [redacted]

Sessione ordinaria 2008 [redacted]
Seconda prova scritta

Ministero della Pubblica Istruzione

BRST – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

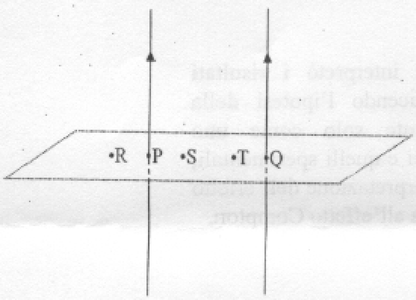
CORSO SPERIMENTALE – Progetto "BROCCA"

Indirizzo: SCIENTIFICO TECNOLOGICO

Tema di: FISICA

Secondo tema

Si abbiano due fili conduttori paralleli percorsi nello stesso verso dalla corrente elettrica d'intensità 1 A e posti alla distanza di 10 cm l'uno dall'altro.



Calcolare il modulo del vettore $\vec{B}$ nei punti R, S, T distanti rispettivamente 3 cm, 3 cm, 7 cm dal punto P, mettendo in evidenza i passaggi matematici necessari per ricavare l'unità di misura dell'induzione magnetica.

Disegnare le linee di forza passanti nei punti R, S, T, mettendo in evidenza la direzione e l'orientamento del vettore $\vec{B}$ negli stessi punti.

Ricavare l'espressione matematica che descrive l'andamento del modulo di $\vec{B}$ tra i punti P e Q e disegnarne il grafico sul piano cartesiano.

In ognuno dei punti S e T passa un protone con velocità $v = 2 \cdot 10^4$ m/s con la traiettoria parallela ai fili e con verso uguale a quello convenzionale della corrente elettrica. Ricavare il modulo, la direzione e il verso della forza di Lorentz che agisce su ognuno dei due protoni e rappresentarne la traiettoria con un disegno, anche se in maniera approssimata. Si ricorda che il protone ha la stessa carica dell'elettrone, ma con segno positivo ($1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C).

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di tavole numeriche e della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Trascrizione ai fini dell'accessibilità

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

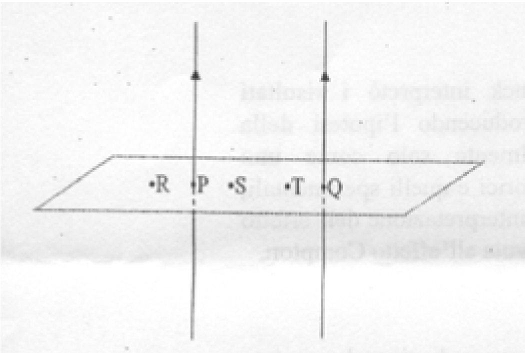
CORSO SPERIMENTALE – Progetto “Brocca”

Indirizzi: SCIENTIFICO – SCIENTIFICO TECNOLOGICO

Tema di FISICA

Secondo tema

Si abbiano due fili conduttori paralleli percorsi nello stesso verso dalla corrente elettrica d’intensità 1 A e posti alla distanza di 10 cm l’uno dall'altro.



Calcolare il modulo del vettore **B** nei punti R, S, T distanti rispettivamente 3 cm, 3 cm, 7 cm dal punto P, mettendo in evidenza i passaggi matematici necessari per. ricavare l’unità di misura dell’induzione magnetica.

Disegnare le linee di forza passanti nei punti R, S, T, mettendo in evidenza la direzione e l'orientamento del vettore **B** negli stessi punti.

Ricavare l’espressione matematica che descrive l'andamento del modulo di B tra i punti P e Q e disegnarne il grafico sul piano cartesiano.

In ognuno dei punti S e T passa un protone con velocità $v = 2 \cdot 10^4$ m/s con la traiettoria parallela ai fili e con verso uguale a quello convenzionale della corrente elettrica.

Ricavare il modulo, la direzione e il verso della forza di Lorentz che agisce su ognuno dei due protoni e rappresentarne la traiettoria con un disegno, anche se in maniera approssimata.
Si ricorda che il protone ha la stessa carica dell’elettrone, ma con segno positivo ($1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C)

Riportiamo nella fig. 1 una rappresentazione in pianta della distribuzione di corrente; indichiamo quindi con xy il piano perpendicolare ai due fili e passante per P (con rispettivi versori $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$), d la distanza tra le correnti.

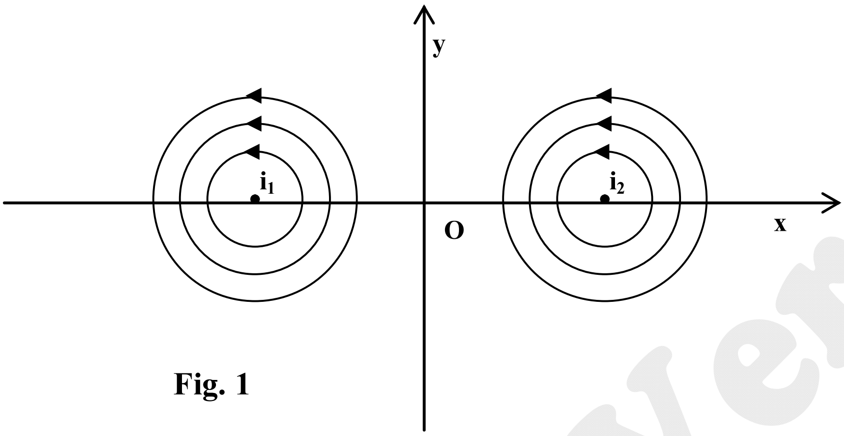


Fig. 1

Ogni conduttore genera un campo le cui linee sono circonferenze concentriche al filo stesso, orientate in senso antiorario, il cui modulo è dato dalla legge di Biot-Savart (r è la distanza tra il filo e il punto considerato)

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} \tag{1}$$

il campo risultante è pertanto la sovrapposizione dei campi generati dai due conduttori e nei punti richiesti vale, in forma vettoriale:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B_R} &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{\overline{RP}}+\frac{1}{d+\overline{RP}}\right)\hat{\boldsymbol{y}} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\,\frac{d+2\overline{RP}}{\overline{RP}\left(d+\overline{RP}\right)}\,\hat{\boldsymbol{y}} = -2\cdot 10^{-7}\ N\,A^{-2}\cdot 1\,A\cdot\frac{0.16\,m}{0.039\,m^2}\,\hat{\boldsymbol{y}} = \\ &= -\left(8.21\cdot 10^{-6}\ \frac{N}{A\,m}\right)\hat{\boldsymbol{y}} = -\left(\ 8.21\cdot 10^{-6}\ T\right)\hat{\boldsymbol{y}}\end{aligned} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{B_S} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{\overline{PS}}-\frac{1}{d-\overline{PS}}\right)\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\,\frac{d-2\overline{PS}}{\overline{SP}\left(d-\overline{PS}\right)}\,\hat{\boldsymbol{y}} = \left(\ 3.81\cdot 10^{-6}\ T\right)\hat{\boldsymbol{y}} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{B_T} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{\overline{PT}}-\frac{1}{d-\overline{PT}}\right)\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\,\frac{d-2\overline{PT}}{\overline{PT}\left(d-\overline{PT}\right)}\,\hat{\boldsymbol{y}} = -\left(\ 3.81\cdot 10^{-6}\ T\right)\hat{\boldsymbol{y}} \tag{4}$$

La domanda,che chiede di disegnare le linee di forza (sarebbe preferibile dire *linee di campo*) passanti per i punti considerati; a meno di intendere tale richiesta in forma debole, ovvero di indicarne l'andamento in prossimità dei punti indicati, un disegno delle linee può essere effettuato in forma qualitativa, tenendo conto delle simmetrie e del valore del campo nei punti indicati; il campo è dato dalla sovrapposizione dei due campi di forma circolare, entrambi orientati in verso antiorario, generati dai due fili (fig. 2).

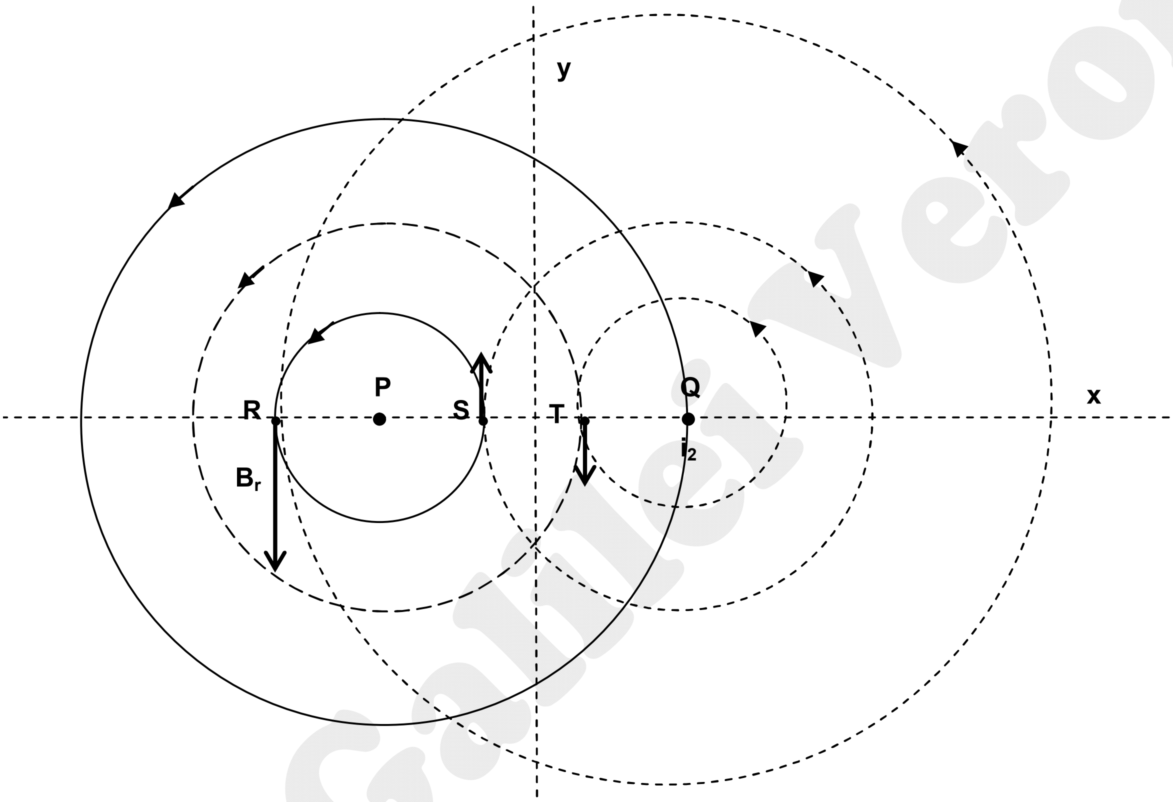


Fig. 2

Osservando che il piano contenente i due fili e il piano assiale sono piani di simmetria per la configurazione delle correnti, anche le linee di campo presentano la stessa simmetria; essendo tuttavia il campo magnetico uno *pseudovettore* (o *vettore assiale*), i campi in punti geometricamente simmetrici presentano la componente perpendicolare al piano di simmetria uguale e la componente parallela opposta.

Inoltre il campo magnetico taglia perpendicolarmente i piani di simmetria (assi x e y nella proiezione di fig. 3), e si annulla nel punto O; le linee di campo non sono più circolari in quanto i campi costituenti nei punti dell'asse x sono concordi all'esterno dei due fili e discordi lungo il segmento che li congiunge, per cui il campo in punti equidistanti da ciascun filo, il campo è più intenso all'esterno che all'interno del segmento, dove le linee si diradano.

Nel limite asintotico di piccole distanze dai fili (r << PQ) o di grandi distanze (r >> PQ) le linee di campo tendono alla forma circolare.

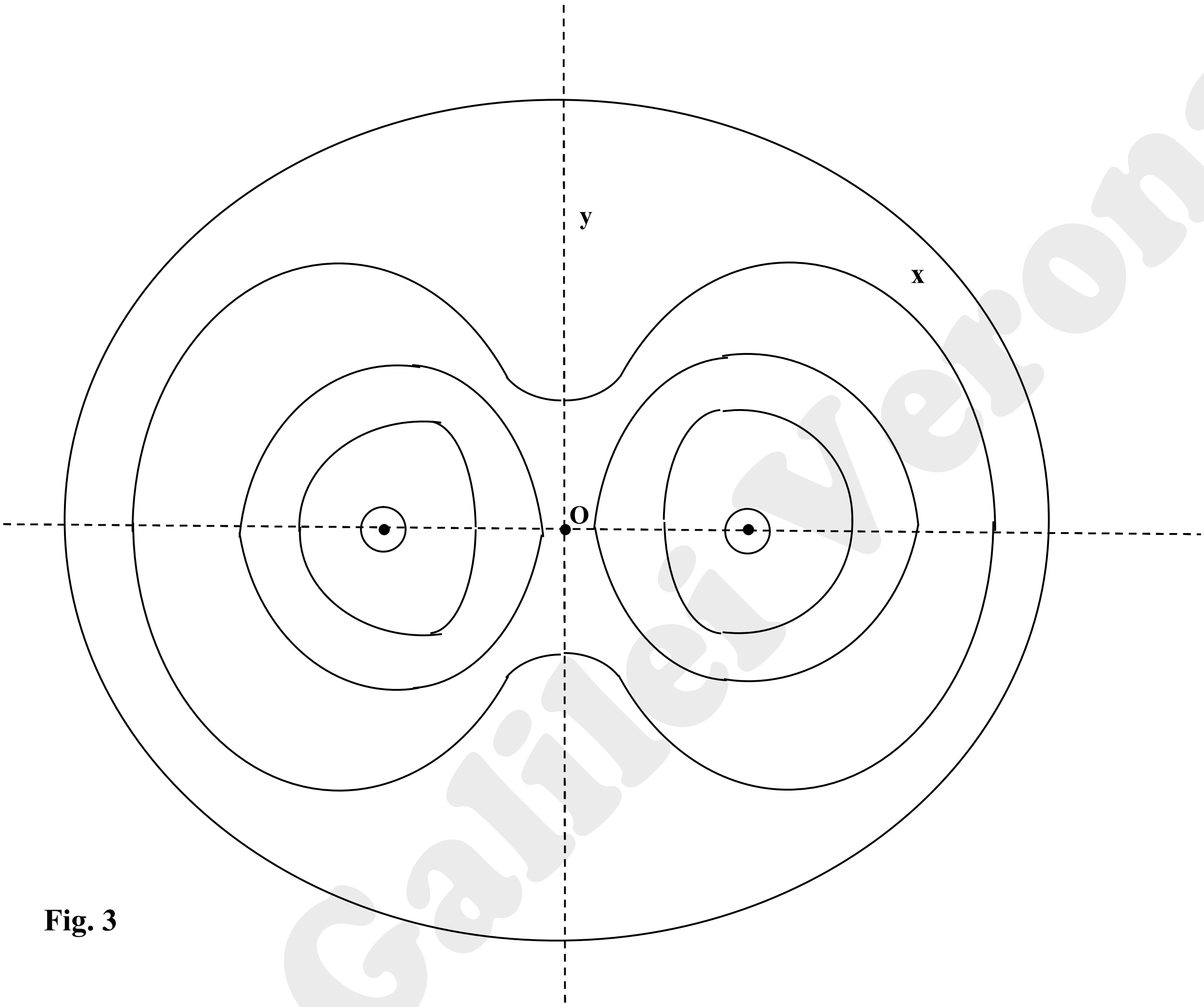


Fig. 3

L'unità di misura del campo magnetico può essere verificata indipendentemente, ovvero senza conoscere la dimensionalità della costante di permeabilità magnetica del vuoto, utilizzando la legge di Laplace che determina la forza su un conduttore di lunghezza ***l***, percorso dalla corrente *i* e posto nel campo di induzione magnetica ***B***, da cui si ottiene l'equazione dimensionale:

$$[B] = \frac{[F]}{[i]\cdot[L]} = \frac{[M]\cdot[L]\cdot[t]^{-2}}{[i]\cdot[L]} = [M]\cdot[i]^{-1}\cdot[t]^{-2}$$

dove con $[M]$, $[L]$, $[t]$, $[i]$ si sono indicate le grandezze fondamentali massa, lunghezza, tempo, intensità di corrente; passando infine alle unita SI:

$$1\,T = 1\frac{N}{A\cdot m} = 1\frac{kg}{A\cdot s^2}$$

Per descrivere il modulo di B tra i punto P e Q conviene, anche ai fini della domanda successiva, riferire la distribuzione ad un sistema di riferimento con origine in P: indicando con x l'ascissa del generico punto del segmento PQ, si ottiene:

$$B = |\boldsymbol{B}| = \frac{\mu_0\, i}{2\pi}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x}\right| = \frac{\mu_0\, i}{2\pi}\left|\frac{d-2x}{x(d-x)}\right| \qquad 0 < x < d \qquad (5)$$

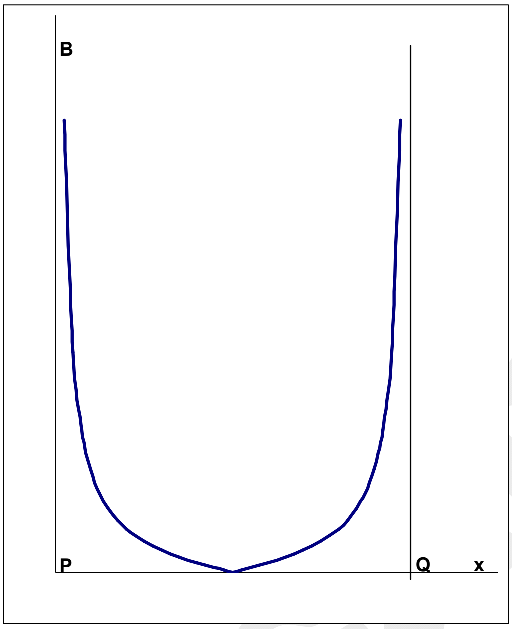


Fig. 4a

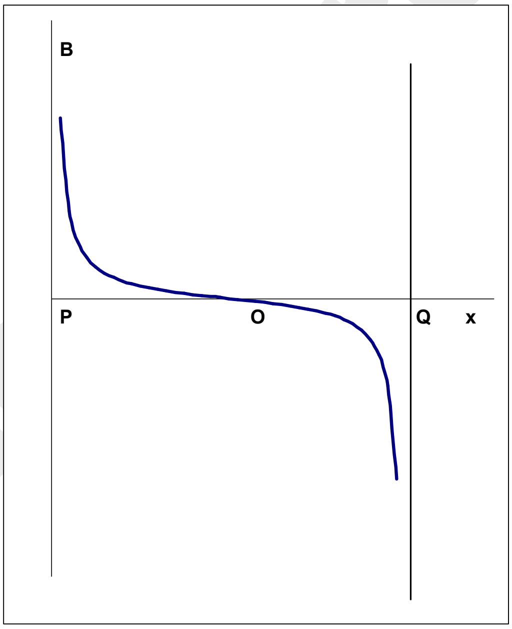


Fig. 4b

il cui grafico, simmetrico rispetto all'asse del segmento PQ (fig. 4a), si ottiene mediante un elementare studio di funzione.

È più utile rappresentare la curva ottenuta senza il valore assoluto (cosicché la simmetria diventa centrale rispetto al punto medio di PQ) in modo da evidenziare anche la direzione del vettore **B**, ottenendo il grafico in fig. 4b.

Per l'ultima richiesta esaminiamo qualitativamente il moto, in quanto la determinazione analitica della traiettoria è al di fuori della portata di una procedura analitica: nei punti S e T il protone risente le forze riportate in fig. 5, di modulo

$$F_S = F_T = evB = 1.22\cdot 10^{-20}\,N$$

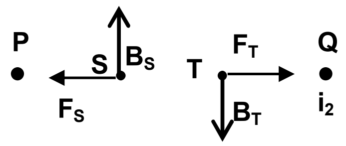


Fig. 5

Ragionando inizialmente sul protone in S, si può osservare che esso viene deviato verso il filo 1, continuando a tagliare le linee di campo in modo perpendicolare, per cui la traiettoria giace nel piano che contiene i due fili; il moto, come qualunque moto in un campo magnetico, è uniforme (velocità costante in modulo) in quanto la forza di Lorentz non compie lavoro sulla carica; si può ancora osservare che, man mano che la carica si avvicina al filo, passa in punti in cui il campo assume valori crescenti (al limite tendenti all'infinito, se si trascurano le dimensioni trasversali del filo), per cui anche la forza aumenta, anch'essa in modo divergente; ne segue che il raggio di curvatura della traiettoria diminuisce (il fattore angolare che compare nella legge di Laplace è sempre *sen* $\alpha = 1$, in quanto il vettore velocità si mantiene, come detto, perpendicolare al campo).

In maniera semiquantitativa si può affermare che il raggio di curvatura puntuale, a distanza x dal filo, vale $R(x) = \dfrac{mv}{eB(x)} \propto x$, ottenuto approssimando il campo a quello di un solo conduttore; per piccole distanze x dal filo, si ha:

$$\lim_{x \to 0} R(x) = 0$$

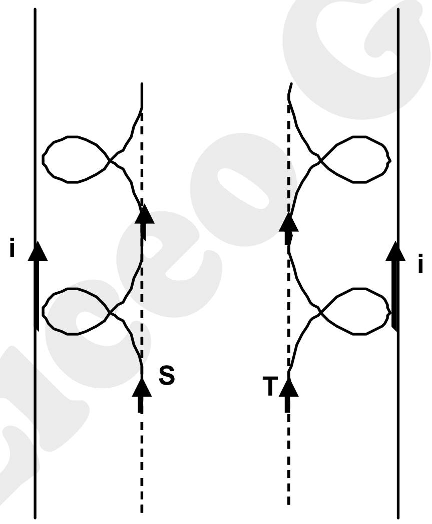


Fig. 6

da cui segue che il moto, in prossimità del filo, subisce un'inversione (velocità diretta verso il basso e forza diretta verso sinistra); essendo la velocità costante, la forza risentita dal protone assume valori uguali, ma direzione opposta, in punti equidistanti dal filo, per cui si può desumere che la traiettoria è contenuta entro la striscia limitata dal conduttore e dalla retta ad esso parallela passante per S (v. figura 6); ogni retta perpendicolare al conduttore e passante per il cappio è inoltre asse di simmetria della traiettoria stessa.

La situazione è simmetrica per il filo di destra.

Si deve tuttavia aggiungere che, per distanze prossime a zero, possono divenire significative le interazioni elettrostatiche con i singoli nuclei del reticolo che costituisce il filo e con le singole cariche di conduzione, per cui il calcolo può perdere significato.

Le osservazioni svolte non sono inoltre ovviamente valide nel caso si considerino i fili di dimensioni trasversali finite: in tal caso il campo si mantiene anch'esso finito e la carica potrebbe invertire il proprio moto o urtare il filo in dipendenza dalla propria velocità iniziale.