**Simulazione ministeriale dell'Esame di Stato 2019 – Fisica**

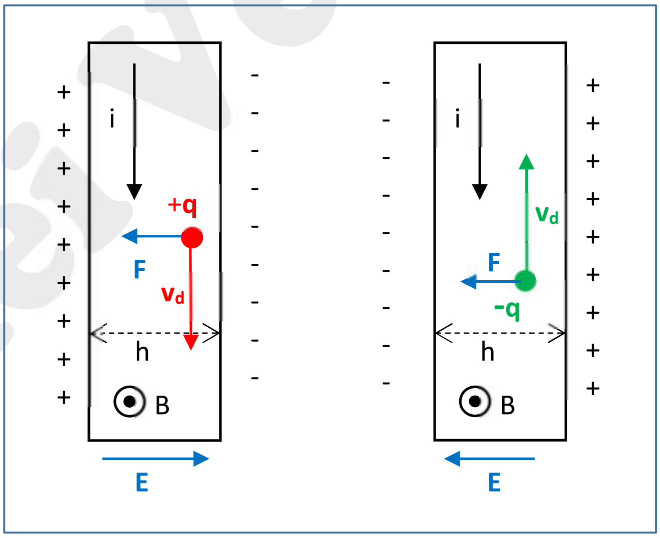
**Problema n. 1**

**1**

Le cariche di conduzione si muovono all'interno della lastra di rame con velocità media in direzione longitudinale, risentendo la forza di Lorentz dovuta all'interazione con il campo magnetico che ne determina lo spostamento in direzione trasversale (lungo il lato h nella figura del testo) che causa la polarizzazione del conduttore e la conseguente formazione di un campo elettrico tra le due facce e di una differenza di potenziale tra di esse.

**2**

L'effetto Hall ha permesso di individuare il segno delle cariche di conduzione in una corrente elettrica: le due lastre conduttrici in figura sono percorse dalla stessa corrente i ed immerse in un campo magnetico **B** uscente dal piano del foglio.




Nella figura a sinistra supponiamo che la corrente sia dovuta ad un moto di cariche positive con velocità $v_d$ (velocità di deriva) verso il basso (nel verso della corrente), in quella a destra, nella stessa situazione, supponiamo invece che la corrente sia dovuta ad un moto di cariche negative, nel verso opposto a quello della corrente.

In entrambi i casi, la forza di Lorentz $\vec{F} = q\vec{v_d} \times \vec{B}$ devia le cariche verso il lato sinistro del conduttore: ne risulta che, nel primo caso, la faccia sinistra si polarizza positivamente, venendosi a trovare ad un potenziale più alto rispetto a quella destra (campo elettrico diretto verso destra), mentre nel secondo caso la stessa faccia si polarizza negativamente (campo elettrico verso sinistra).

L'esperimento mostra che, in un conduttore metallico, si verifica solo il secondo caso, mostrando che la corrente è determinata dal moto di cariche negative all'interno del conduttore.

Si noti che la figura riportata nel testo corrisponde al moto di cariche positive, quindi non corrisponde all'esito della misura su una lastra di rame, dove le cariche di conduzione sino gli elettroni.

**3**

A regime, le forze del campo elettrico e del campo magnetico che agiscono sulle cariche si equilibrano

$$q\vec{E} = q\vec{v_d} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{v_d} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad E = v_d B$$

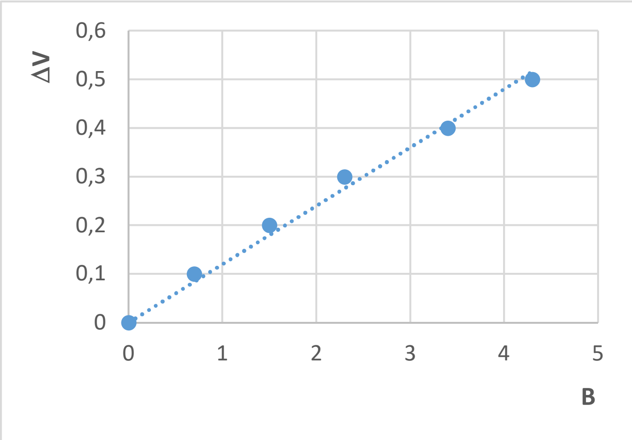
La differenza di potenziale $\Delta V_H$ tra le due facce della lastra è data da:

$$\Delta V_H = E\,h = h v_d B = k\,B \quad \text{con } k = h\,v_d$$

**4**

Riportiamo i dati sperimentali in una tabella, calcolando il rapporto $k = \dfrac{\Delta V_H}{B}$ e in un grafico, nel quale è riportata anche la retta di *best fit* (o di *tendenza*)

| ΔV ($10^{-7}$ V) | B (T) | k=ΔV/B ($10^{-7}$ V/T) |
|---|---|---|
| 0,70 | 0,100 | 7,0 |
| 1,5 | 0,200 | 7,5 |
| 2,3 | 0,300 | 7,7 |
| 3,4 | 0,400 | 8,5 |
| 4,3 | 0,500 | 8,6 |
| | media | 7,9 |
| | incertezza $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | 0,3 |




L'incertezza sul rapporto *k* è stata stimata dividendo la deviazione standard della distribuzione delle misure il numero di prove effettuate: $\Delta k = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0,680 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{V \cdot T^{-1}}}{\sqrt{5}} = 0,30 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{V \cdot T^{-1}}$.

Pertanto, utilizzando il numero di cifre significative adeguate, si può stimare

$$k = (7,9 \pm 0,3) \cdot 10^{-7}\; V\,T^{-1}$$

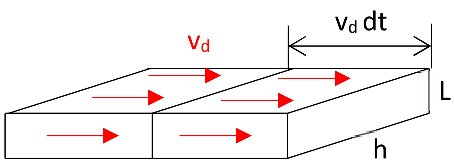
I dati sono compatibili entro il 4% circa con una relazione di proporzionalità diretta tra le due grandezze.

**5**

Stranamente in questa domanda non si utilizza il valore di *k* desunto dalla precedente tabella, creando un possibile disagio ai candidati; in ogni modo, con i dati forniti la velocità di deriva può stimarsi in

$$v_d = \frac{k}{h} = \frac{9,1 \cdot 10^{-7}\; V/T}{1,0 \cdot 10^{-3}\; m} = 9,1 \cdot 10^{-4}\; m\,s^{-1}$$

La corrente nel conduttore è data dal rapporto tra la carica che attraversa, nel tempo *dt*, una sezione del conduttore, di estensione *L·h* e l'intervallo dt; tale carica corrisponde a quella contenuta in un parallelepipedo di base *L·h* e altezza *dx* = $v_d$ *dt*, pari alla distanza mediamente percorsa da una carica nel tempo *dt*.




Indicando con $\rho$ la densità di carica per unità di volume si ha pertanto:

$$dq = \rho\, dV = \rho\, Lh\, dx = \rho\, Lh\, v_d\, dt$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\rho\, Lh\, dx}{dt} = \rho\, Lh\, v_d \quad \Rightarrow$$

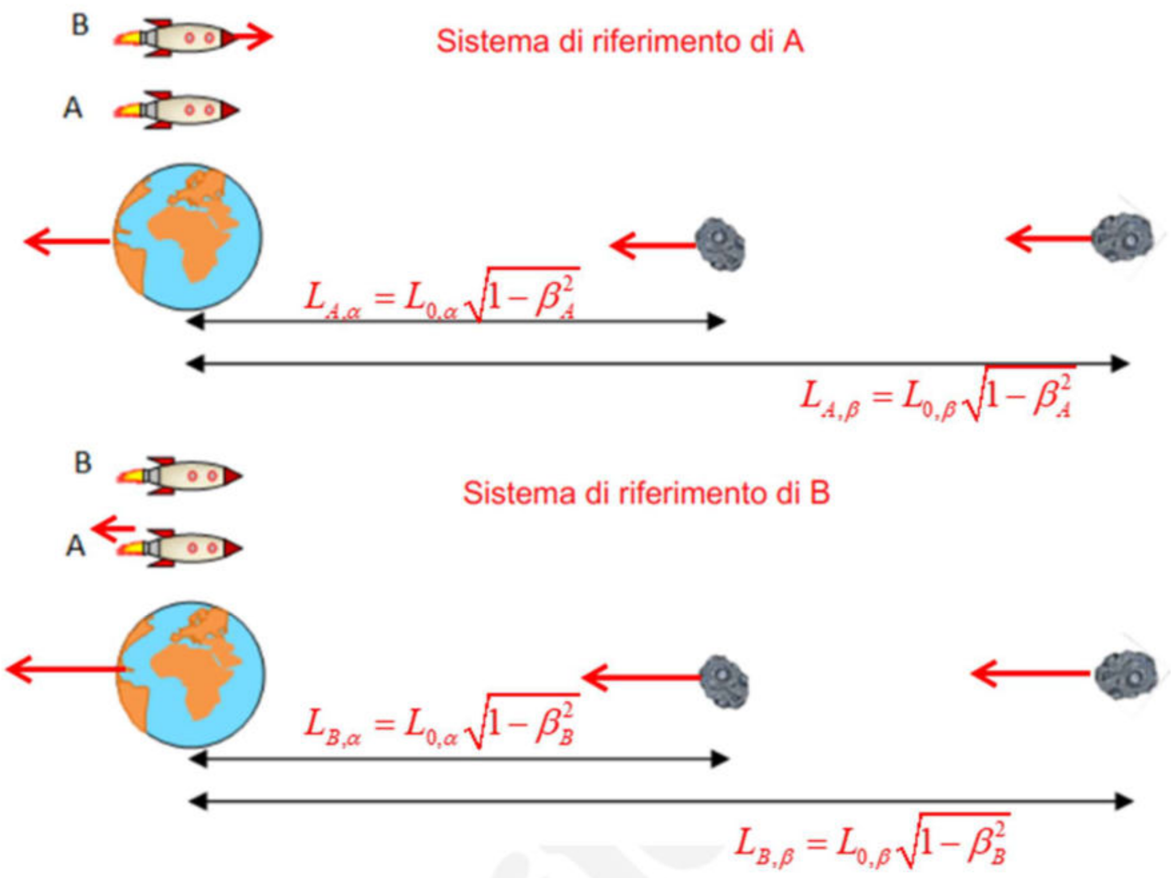
$$\rho = \frac{I}{Lh\, v_d} = \frac{1,0\, A}{2,0 \cdot 10^{-2}\, m \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}\, m \cdot 9,1 \cdot 10^{-4}\, m\, s^{-1}} = 5,5 \cdot 10^{7}\; C \cdot m^{-3}$$

Poiché le cariche di conduzione sono negative, con velocità media $-v_d$, la densità di carica realmente associata alla corrente ha segno negativo:

$$\rho = -5,5 \cdot 10^7\ C \cdot m^{-3}$$

**Problema n. 2**

**1**




Nel proprio sistema di riferimento ciascuna astronave vede se stessa ferma, gli asteroidi avvicinarsi con velocità -v e le distanze longitudinali contratte del fattore di Lorentz $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Tale fattore dipende dalla velocità del sistema di riferimento mobile rispetto a quello solidale alla Terra, quindi è diverso per le due astronavi; nella figura è stata adottata la notazione $\beta_A = \frac{v_A}{c}$ e $\beta_B = \frac{v_B}{c}$; l'astronave A vede inoltre B (più veloce) muoversi in avanti con velocità $v_{AB}$, mentre B vede A allontanarsi in direzione opposta con velocità - $v_{AB}$.

**2**

Premettiamo che la notazione del testo è confusa, in quanto indica con lo stesso simbolo $t'_\alpha$ sia il tempo proprio misurato dall'osservatore A, sia il corrispondente intervallo misurato da B (analogamente per $t'_\beta$) (punti 3 e 4).

Scegliamo allora di indicare con $t_{0\alpha}$ e $t_{0\beta}$ il tempo proprio di ciascun osservatore, con $t'_\alpha$ e $t'_\beta$ il corrispondente intervallo misurato dall'altro sistema di riferimento.

Per determinare la velocità delle astronavi è necessario misurare spazio percorso e tempo impiegato *nello stesso sistema di riferimento*; poiché il testo indica esplicitamente la distanza dell'asteroide nel sistema terrestre ($L_0$) e il tempo proprio dell'astronave ($t_0$), si ha:

$$v = \frac{L_0}{\gamma\, t_0} = \frac{L_0}{t_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{L_0 c}{\sqrt{c^2 t_0^{\,2} + L_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c t_0}{L_0}\right)^2}}\, c$$

Il rapporto iniziale per determinare *v* può essere letto nei due sistemi di riferimento:

$$v = \frac{L_0}{\gamma\, t_0} = \frac{L_0}{durata\ del\ viaggio\ nel\ S.R.I.\,terrestre} = \frac{L_0/\gamma}{t_0} = \frac{distanza\ nel\ S.R.I.\,astronave}{tempo\ proprio\ astronave}$$

l'ultimo passaggio è finalizzato a semplificare il calcolo numerico, utilizzando *c* come fattore di scala di velocità e distanze.

Si ha pertanto, per le due astronavi:

$$v_A = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c t_{0\alpha}}{L_{0\alpha}}\right)^2}}\, c = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c\cdot 3,299\cdot 10^4\, s}{4\cdot 3600\, s\cdot c}\right)^2}}\, c = 0,400\, c$$

$$v_B = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c t_{0\beta}}{L_{0\beta}}\right)^2}}\, c = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c\cdot 3,299\cdot 10^4\, s}{7,5\cdot 3600\, s\cdot c}\right)^2}}\, c = 0,633\, c$$

La velocità di allontanamento relativo tra le due astronavi è data da:

$$v_{AB} = \frac{v_B - v_A}{1-\frac{v_B v_A}{c^2}} = 0,312\, c$$

**3,4**

La risposta a queste domande non richiede calcoli: i due osservatori misurano, per i rispettivi viaggi, lo stesso tempo proprio, quindi ciascuno dei due misura una durata maggiore per il viaggio del collega; ognuno dei due può quindi ritenere di aver vinto.

Solo per completezza, ciascuno dei due osservatori misura per l'altro il tempo

$$t'_\alpha = t'_\beta = \gamma_{AB} t_{0\alpha} = \frac{t_{0\alpha}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{AB}}{c}\right)^2}} = 3,472\cdot 10^4\, s \simeq 9\, h\, 38 \min 43\, s$$

**5**

I due eventi *arrivo di B sull'asteroide* $\beta$ e *arrivo di A sull'asteroide* $\alpha$ sono separati, nel riferimento di A, dall'intervallo temporale

$$\Delta t' = t_{0\alpha}\left(\gamma_{AB}-1\right) = t_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{AB}}{c}\right)^2}}-1\right) = 0{,}173\cdot 10^4\ s$$

e dall'intervallo spaziale

$$\Delta x' = \frac{L_{0\beta}-L_{0\alpha}}{\gamma_{AB}} = \left(L_{0\beta}-L_{0\alpha}\right)\sqrt{1-\left(\frac{v_{AB}}{c}\right)^2} = \left(7{,}5-4{,}0\right)\cdot 3600\, s\cdot c = 1{,}197\cdot 10^4\ s\cdot c$$

L'intervallo spaziotemporale[1], invariante relativistico, risulta

$$I^2 = c^2\left(\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2 < 0$$

ne segue che i due eventi, separati da un *intervallo di tipo spazio*, non possono essere messi in rapporto causa-effetto; per tali eventi la sequenza temporale non è invariante.

Si può osservare ulteriormente che la sfida proposta dal comandante è mal posta, in quanto sarebbe stato necessario precisare il sistema di riferimento, ad es. quello solidale alla Terra, nel quale valutare i tempi di arrivo delle due astronavi. Poiché i due osservatori misurano lo stesso tempo proprio, il tempo misurato nel sistema di riferimento terrestre dipende dal fattore $\gamma$ per cui, essendo $v_A < v_B$, risulta anche $\gamma_A < \gamma_B$:

$$T_A = \gamma_A t_{0\alpha} < \gamma_B t_{0\beta} = T_B$$

Quindi, rispetto ad un osservatore rimasto nella base terrestre, il primo astronauta a raggiungere il proprio obiettivo è A.

[1] Non esiste tuttora una convenzione unanimemente condivisa per la notazione delle grandezze relativistiche nel formalismo quadrivettoriale (dal quale derivano direttamente gli invarianti), per cui alcuni testi utilizzano per l'intervallo spaziotemporale la notazione $I^2 = c^2\left(\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2$, altri lo scrivono con il segno opposto $I^2 = \left(\Delta x\right)^2 - c^2\left(\Delta t\right)^2$

QUESTIONARIO

**Quesito n. 1**

Il campo magnetico generato dal solenoide, nell'approssimazione di campo uniforme, vale:

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} i = \mu_0 \frac{N}{L} i$$

La forza elettromotrice indotta nella spira è data da:

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} = -\pi\mu_0 \frac{N}{L} r^2 \frac{di}{dt} = -\pi\mu_0 \frac{N}{L} r^2 i_0\, \omega \cos\left(\omega t\right)$$ il cui valore massimo è:

$$f.e.m._{MAX} = \pi\mu_0 \frac{N}{L} r^2 i_0\, \omega = 1,2\; mV$$

cui corrisponde la corrente massima $I_{MAX} = \frac{f.e.m._{MAX}}{R} = 6,2\; mA$

**Quesito n. 2**

a) L'intensità della radiazione è data da:

$$I = \frac{P_{emessa}}{S} = \frac{0,02 P_{ass}}{4\pi d^2} = 0,040\; W\, m^{-2}$$

b) $I = c\, u = \varepsilon_0 c E_{eff}^2 \quad \Rightarrow \quad E_{eff} = \sqrt{\frac{I}{\varepsilon_0 c}} = 3,9\; V\, m^{-1}$

$$B_{eff} = \frac{E_{eff}}{c} \quad = 1,3 \cdot 10^{-8}\; T$$

**Quesito n. 3**

Il lavoro del campo elettrico, indipendente dalla distanza catodo-anodo (essendo fissata la differenza di potenziale), è uguale all'energia cinetica degli elettroni (assunta trascurabile l'energia iniziale):

$$mc^2\left(\gamma - 1\right) = e\Delta V \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1 + \frac{e\Delta V}{mc^2} = 1 + \frac{1,00 \cdot 10^5\; eV}{5,11 \cdot 10^5\; eV} = 1,20 \quad \Rightarrow \quad v = \beta c = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} c = 0,55\, c$$

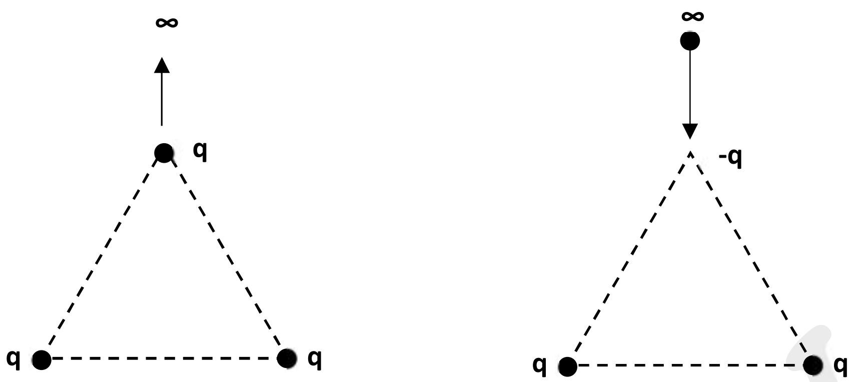
**Quesito n. 4**

Con le tre cariche positive: $U_1 = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}$

Con una carica negativa: $U_2 = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} - \dfrac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} = \dfrac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}$

L'energia negativa del secondo stato implica che quest'ultimo sia un sistema legato.

Si può pensare la sostituzione della carica con la seguente modalità:




lasciando fisse le cariche alla base del triangolo (v. figura a sinistra) la carica q nel vertice viene allontanata all'infinito: il campo compie lavoro $L_1 = \dfrac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}$

La carica -q viene portata dall'infinito fino al vertice superiore del triangolo; il campo compie lavoro $L_2 = L_1 = \dfrac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}$

Il sistema ha pertanto una variazione di energia pari a $\Delta U = -L_{campo} = -\left(L_1 + L_2\right) = \dfrac{-4q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} = U_2 - U_1$

**Quesito n. 5**

L'energia dell'elettrone è classicamente data dalla relazione

$$E_C = \frac{p^2}{2m_e} = e\,\Delta V \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2m_e e\,\Delta V}$$

La lunghezza d'onda di de Broglie è data da:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e e\,\Delta V}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta V}}\sqrt{\frac{\left(6,626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\right)^2}{2\cdot 9,109\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot 1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}} = \sqrt{\frac{1,504\cdot 10^{-18}}{\Delta V}}\,\mathrm{m} =$$

$$= \sqrt{\frac{1,504}{\Delta V}}\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} = \sqrt{\frac{1,504}{\Delta V}}\,\mathrm{nm}$$

**Quesito n. 6**

Il lavoro di estrazione è dato dalla differenza tra l'energia del fotone incidente e l'energia cinetica dell'elettrone emesso, misurata tramite il potenziale di arresto.

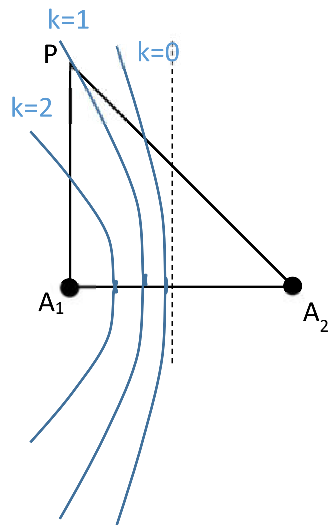
$$L_e = h\nu - eV_A = \frac{hc}{\lambda} - eV_A = 7{,}6 \cdot 10^{-19}\ J = 4{,}7\ eV$$

**Quesito n. 7**

Dalla descrizione del sistema si evince che le due molle sono disposte in parallelo, con la prima che si comprime di $x_1$ = 50 cm, la seconda di $x_2$ = 30 cm; ipotizzando una possibile costruzione, le due molle potrebbero essere una dentro l'altra, con la seconda più corta di 20 cm rispetto alla prima.
Trascurando ogni forma di dispersione, si ha pertanto:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k_1 x_1^{\ 2} + \frac{1}{2}k_2 x_2^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k_1 x_1^{\ 2} + k_2 x_2^{\ 2}}{m}} = 0{,}48\ m\,s^{-1}$$

**Quesito n. 8**




Dalla prima informazione si deduce che i due altoparlanti emettono in controfase; nella seconda posizione (P) si ha invece interferenza costruttiva:

$$\overline{PA_2} - \overline{PA_1} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)m = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{4\left(\sqrt{2}-1\right)}{2k+1}m = \frac{1{,}66\ m}{2k+1} \qquad k \in N$$

Lungo la retta $A_1P$ possono esserci più massimi (*k* decresce allontanandosi dalla sorgente, il valore *k* = 0 corrisponde all'ultimo punto di massimo osservabile sulla retta $A_1P$); dall'ultima equazione si deduce che $\lambda \le 1{,}66\ m$ non si hanno però elementi per stabilire con certezza il valore di *k*, quindi la lunghezza d'onda.

Eseguiamo un calcolo a posteriori, che esula però dalla soluzione richiesta, osservando cosa succede con le prime lunghezze d'onda compatibili con il massimo in P.
Assunta nota la lunghezza d'onda (ci limitiamo ad assegnare a *k* i primi due valori 0 e 1) $\lambda_0 = 1{,}66\ m$, oppure $\lambda_1 = 0{,}55\ m$ cerchiamo tutti punti di massimo sulla retta $A_1P$.

Siano, per brevità, $x = \overline{A_1P}$, $n = 2k+1$, $\quad n = 1,3,5....$ Si ha:

$$\sqrt{x^2 + \overline{A_1A_2}^2} - x = n\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4\ m^2 - \left(n\dfrac{\lambda}{2}\right)^2}{n\lambda}$$

Dovendosi avere $x > 0$, per $\lambda_0 = 1{,}66\ m$ la soluzione è unica (*n* = 1 è l'unico valore ammissibile), per $\lambda_1 = 0{,}55\ m$ *n* può assumere i valori 1, 3, 5, 7, quindi vi sono 4 punti di massimo sulla retta.