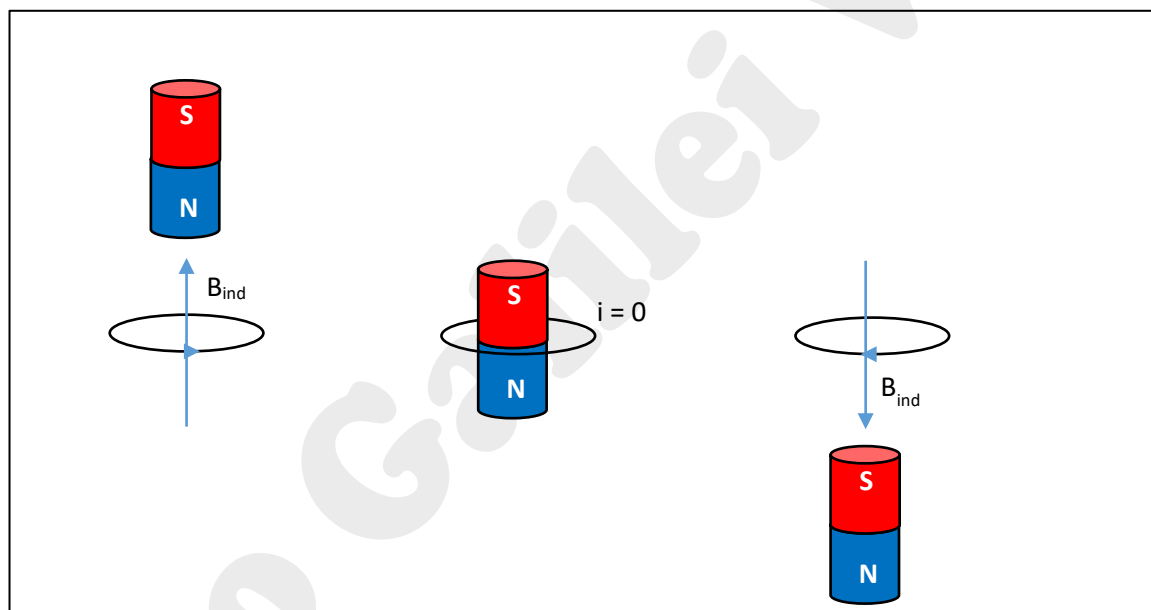


Problema n. 1

1

Il magnete, cadendo, determina una variazione del flusso di campo magnetico che attraversa le due spire, inducendo in esse una corrente elettrica che, per la legge di Lenz, si oppone alla causa che la ha generata, rallentando la caduta del magnete stesso. A questo risultato si può giungere anche mediante considerazioni energetiche: l'energia del sistema deriva dal lavoro che la forza peso compie sul magnete; la corrente indotta sottrae energia al sistema, per cui il magnete cade con una velocità inferiore; d'altra parte la legge di Lenz può essere vista come l'applicazione del principio di conservazione dell'energia al caso particolare dei sistemi soggetti a induzione elettromagnetica.

Con il Polo Nord del magnete rivolto verso il basso, come nella figura 2 del testo, la corrente circola in senso antiorario (guardando il sistema dall'alto) finché il centro del magnete è al di sopra della spira, in modo da generare un campo magnetico che presenti il polo Nord in alto, si annulla quando centro del magnete si trova in corrispondenza della spira (il flusso è istantaneamente stazionario) e circola in senso orario quando il centro del magnete è al di sotto della spira, in modo da produrre un campo magnetico avente direzione tale da attrarre il polo Sud del magnete stesso, frenandone la caduta



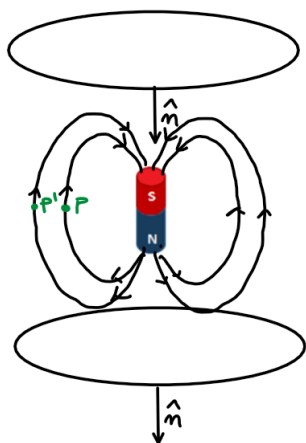
La variazione di flusso dipende unicamente dalla forma del campo del magnete e dalla sua posizione rispetto alla spira; gli effetti indotti (f.e.m., corrente e forza di resistenza passiva) sono invece, intesi come grandezze istantanee, proporzionali alla rapidità di variazione del flusso, quindi dipendono dalla velocità di caduta del magnete.

Considerando il campo nella direzione del tubo (asse z), si ha:

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dz} \frac{dz}{dt} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dz} \cdot v$$

Corrente indotta e campo magnetico si invertono allorché si rovescia il magnete.

Possiamo tentare di esaminare in modo qualitativo l'andamento del flusso del campo magnetico; osserviamo preliminarmente che, immaginando di spostarsi lungo una linea di campo magnetico (campo di dipolo),



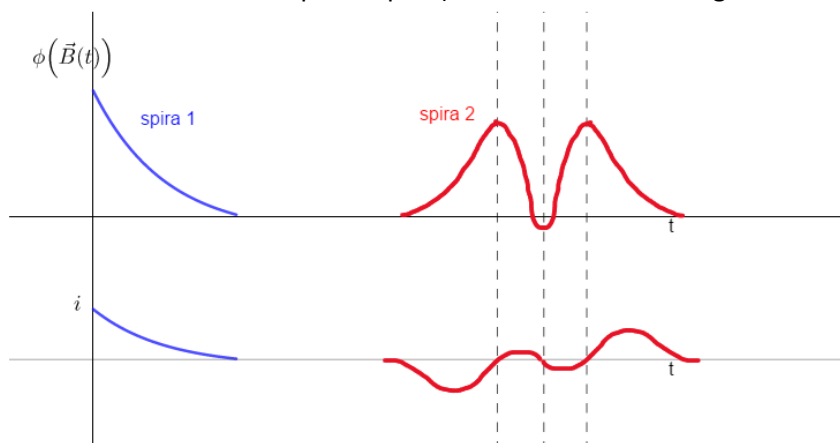
l'intensità è massima in corrispondenza dei poli, minima in corrispondenza del piano di simmetria orizzontale (passante per i punti P, P' in figura).

Orientiamo verso il basso la normale alle spire.

Partendo con il magnete al di sopra di una spira, mentre le si avvicina il flusso del campo magnetico che la attraversa è positivo e aumenta in modulo fino a raggiungere un massimo; quando i punti P e P' si trovano all'altezza della spira, il flusso è negativo, con intensità ragionevolmente piccola rispetto al massimo precedente, dopodiché il flusso varia con andamento simmetrico a quanto appena descritto. Si noti che quando il magnete ha superato completamente la spira il flusso assume nuovamente valore positivo (le linee di campo entrano nel polo Sud).

L'andamento del flusso può pertanto essere descritto qualitativamente dal seguente grafico:

in blu il flusso attraverso la prima spira (all'istante iniziale il magnete è al di sotto della spira, ed è già supposto in moto alla velocità limite); se il magnete invece partisse da fermo dalla posizione indicata nel testo, la corrente iniziale sarebbe nulla e bisognerebbe considerare una asimmetria nella figura, dovuta all'accelerazione del magnete stesso.



In rosso è riportato il flusso attraverso la seconda spira;

entrambi i flussi si annullano asintoticamente.

La seconda figura rappresenta la corrente indotta nelle due spire $i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$; le linee tratteggiate consentono di visualizzare i punti in cui la corrente si annulla, in corrispondenza dei massimi e minimi locali del flusso. La corrente è positiva quando circola (vista dall'alto del tubo) in senso orario

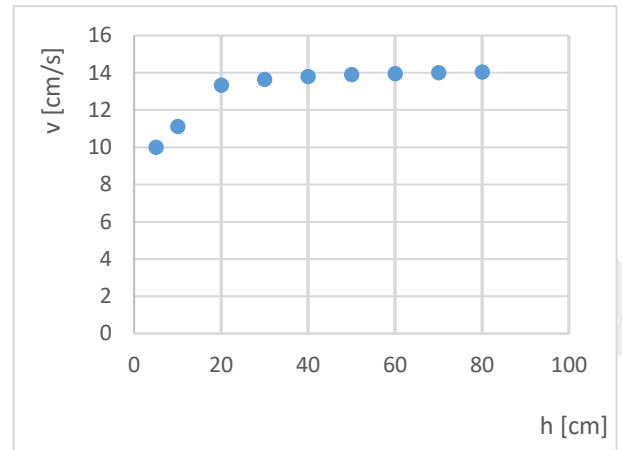
2

Riportiamo i valori delle velocità medie con il relativo errore assoluto, per il cui calcolo è stata utilizzata la relazione

$$v = \frac{h}{\Delta t} \pm \frac{h}{\Delta t} \left(\frac{\varepsilon_h}{h} + \frac{\varepsilon_t}{\Delta t} \right) \quad (*)$$

dove $\varepsilon_h = 0,1 \text{ cm}$ e $\varepsilon_t = 0,1 \text{ s}$ sono rispettivamente l'errore assoluto sulle misure di altezza e tempo di caduta.

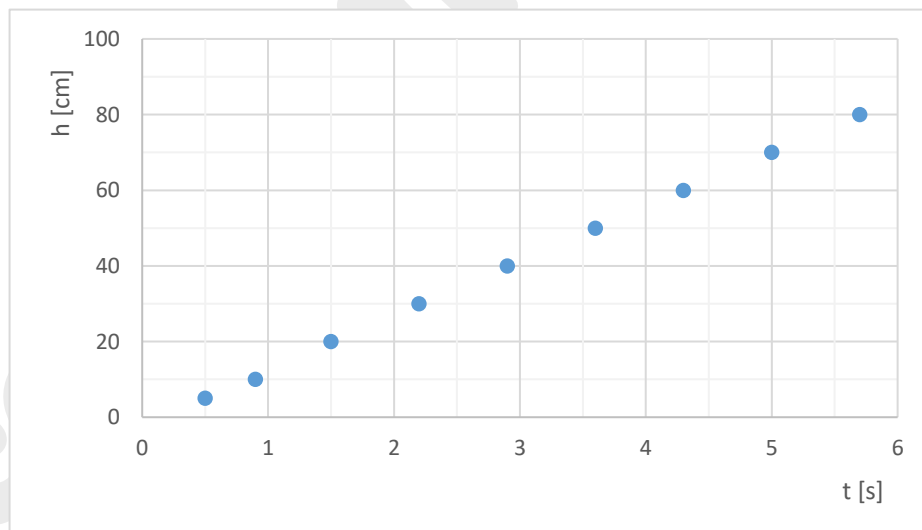
h [cm]	Δt [s]	v [cm/s]	Δv [cm/s]
5,0	0,5	10,0	2,2
10,0	0,9	11,1	1,3
20,0	1,5	13,3	1,0
30,0	2,2	13,6	0,7
40,0	2,9	13,8	0,5
50,0	3,6	13,9	0,4
60,0	4,3	14,0	0,3
70,0	5,0	14,0	0,3
80,0	5,7	14,0	0,3



Dalla tabella e dal grafico si può dedurre che la velocità media tende ad un valore limite $\overline{v_{lim}} = (14,0 \pm 0,3) \text{ cm/s}$.

Sottolineiamo il fatto che questo valore non individua la *velocità limite* raggiunta dal magnete, bensì il *limite della velocità media*, nel cui calcolo si considera anche la fase iniziale di accelerazione. La velocità limite, richiesta nella seconda parte della domanda, può essere trovata considerando i dati relativi al moto, una volta divenuto uniforme (condizione che si raggiunge già dopo circa 20 cm di caduta,).

Possiamo anche notare come la tabella fornita sia interpretabile come una legge oraria: dal momento che il cilindro di rame è un conduttore continuo (più precisamente, si ha un'invarianza di traslazione lungo la verticale, che si perde invece nel sistema del cilindro di plexiglas con le due spire), il tempo di caduta misurato per una certa altezza h corrisponde al tempo che il cilindro impiega a percorrere la distanza h partendo da fermo da una quota qualunque; si può pertanto disegnare il grafico relativo alla legge oraria del moto del magnete:



ricavando infine la velocità limite

$$v_{lim} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{(80,0 - 20,0) \text{ cm}}{(5,7 - 1,5) \text{ s}} = (14,3 \pm 0,5) \text{ cm/s}$$

Il cui valore risulta sovrapponibile, entro l'errore sperimentale, al limite della velocità media del calcolo precedente.

Nel calcolo si è scelto di utilizzare il massimo intervallo nel quale la velocità risulta sperimentalmente costante: dopo 20 cm di caduta l'incremento di 10 cm della distanza percorsa comporta 0,7 s di incremento

del tempo di percorrenza; la scelta dell'intervallo massimo consente di minimizzare l'errore relativo sulla velocità, ovvero di migliorare la precisione della misura ottenuta.

Per la stima dell'errore è stata utilizzata la relazione precedente (*), utilizzando per l'errore assoluto sulla differenza la relazione in quadratura

$$\Delta(a-b) = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}$$

L'equazione di Newton del sistema è

$$m\vec{g} + \vec{F}_r = m\vec{a}$$

da cui, orientando l'asse z verso il basso, nella direzione del moto, e utilizzando per la forza di interazione magnetica il modello suggerito dal testo, si ottiene

$$mg - kv = ma$$

la velocità limite si ottiene per $a = 0$, ovvero quando la forza dovuta all'interazione magnetica uguaglia la forza peso:

$v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k}$ da cui, utilizzando il valore dedotto dal grafico, si ricava per la costante k :

$$k = \frac{mg}{v_{\text{lim}}} = (161 \pm 6) \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$$

la cui incertezza è data dalla relazione $\Delta k = \frac{mg}{v_{\text{lim}}} \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta v_{\text{lim}}}{v_{\text{lim}}} \right) \approx \frac{mg}{v_{\text{lim}}} \frac{\Delta v_{\text{lim}}}{v_{\text{lim}}} = \frac{mg}{v_{\text{lim}}^2} \Delta v_{\text{lim}}$

(per la costante g si è utilizzato il valore $g = (981 \pm 1) \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$).

L'errore è dovuto quasi interamente all'incertezza sulla velocità (3,5%) in quanto le incertezze su m e g sono di un ordine di grandezza inferiore, circa 0,4% e 0,1 % rispettivamente.

3

Il sistema all'istante iniziale possiede energia potenziale gravitazionale che, nella fase di accelerazione, viene trasformata in energia cinetica, in calore dovuto all'effetto Joule per il passaggio della corrente nel cilindro di rame e nell'energia associata al campo magnetico indotto nel cilindro di rame; effetti secondari di dissipazione, ragionevolmente trascurabili, sono l'attrito nell'aria e la dissipazione termica dovuta alla corrente indotta nel magnete stesso (il ferro è un ottimo conduttore ed il magnete è a sua volta esposto ad un campo magnetico variabile nel tempo). Si ha pertanto:

$$|E_{\text{diss}}| = mgh - \frac{1}{2}mv^2$$

che, calcolata per l'altezza massima $h = 80 \text{ cm}$, fornisce

$$|E_{\text{diss}}| = mgh - \frac{1}{2}mv_{\text{fin}}^2 = 18 \text{ mJ} \quad \text{e} \quad \frac{|E_{\text{diss}}|}{E_{\text{iniziale}}} \cdot 100 = \frac{|E_{\text{diss}}|}{mgh} \cdot 100 = 99,9\%$$

valore motivato con il fatto che, dal momento che il corpo raggiunge rapidamente la velocità limite, il lavoro compiuto successivamente dalla forza peso non comporta variazione di energia cinetica ma viene integralmente dissipato.

4

La potenza dissipata media, nell'insieme delle due spire, è data da

$$\overline{W} = \frac{|E_{diss}|}{\Delta t} = 2R\overline{I^2}$$

da cui:

$$I_{eff} = \sqrt{\overline{I^2}} = \sqrt{\frac{|E_{diss}|}{2R\Delta t}} = \sqrt{\frac{18 \text{ mJ}}{2 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} \Omega \cdot 5,7 \text{ s}}} = 1,3 \text{ A}$$

(è stata utilizzata la scrittura $I_{eff} = \sqrt{\overline{I^2}}$ in quanto nel caso delle due spire, in cui la corrente cambia segno all'attraversamento del magnete, si avrebbe $\overline{I} = 0$).

La variazione di flusso nelle due spire induce una *f.e.m.* il cui valore medio è ricavabile a partire dalla corrente:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \overline{f.e.m.} = RI_{eff} = 1,3 \text{ mV}$$

C'è tuttavia da rilevare che il modello a due spire, utile per discutere qualitativamente l'origine delle forze sul magnete, mostra, per questa specifica domanda, un limite evidente: anche supponendo che le correnti nelle due spire siano uguali, non possono però esserlo simultaneamente e, quando il magnete supera la seconda spira, l'effetto sulla prima è ragionevolmente trascurabile; ne segue che, tranne che per posizioni del magnete intermedie tra le due spire, la potenza sviluppata dalla gravità si dissipa pressoché esclusivamente su una sola spira alla volta. Cercando di interpretare lo spirito del problema non discutiamo ulteriormente questo punto.

L'ultima domanda è meno banale di quanto possa sembrare a prima vista:

a parità di velocità, la *f.e.m.* indotta nei tubi di rame e di alluminio è identica, ma avendo l'alluminio una maggiore resistività, e pertanto offrendo una proporzionalmente maggiore resistenza al passaggio della corrente, si può concludere immediatamente che nel cilindro di alluminio l'effetto Joule dissipa una minore quantità di energia, per cui il magnete ha un'energia cinetica maggiore rispetto a quella che ha nel rame.

La maggiore velocità comporta però una maggiore *f.e.m.* nel tubo di alluminio; tenendo conto comunque che, una volta raggiunta la velocità limite, tutta la potenza sviluppata dalla forza peso viene dissipata per effetto Joule, ed assumendo che la velocità media non sia molto diversa dalla velocità limite, come verificato nel caso del cilindro di rame, si ottiene:

$$mgv = \frac{\overline{f.e.m.}^2}{R} = \frac{\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)^2}{R} = \frac{(\Delta\Phi)^2}{R} \frac{v^2}{h^2} \Rightarrow \frac{v}{R} = \frac{mgh^2}{(\Delta\Phi)^2} = \text{costante}$$

infine, tenendo conto della proporzionalità, a parità di condizioni geometriche, tra resistività e resistenza, si ha:

$$\frac{v}{\rho} = \text{costante} \Rightarrow \frac{v_{Al}}{\rho_{Al}} = \frac{v_{Cu}}{\rho_{Cu}} \Rightarrow v_{Al} = v_{Cu} \cdot \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} = 14,3 \text{ cm/s} \cdot \frac{2,75 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}}{1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}} \approx 23 \text{ cm/s}$$

Come anticipato, questo valore deve essere inteso come una ragionevole stima della velocità raggiunta.

Liceo Galilei Verona

Problema n. 2

L'atomo di Bohr (1913) è un modello semiclassico, che prevede che gli elettroni si muovano su orbite circolari attorno al nucleo; l'energia degli elettroni e la forza di interazione con il nucleo sono calcolate mediante relazioni classiche:

la velocità dell'elettrone è determinata dalla forza di interazione coulombiana con il nucleo, che fornisce la forza centripeta necessaria a garantire il moto, ovvero

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Utilizzando il valore di r ricavato da tale equazione, si ottiene per l'energia totale del sistema (energia potenziale di interazione protone-elettrone + energia cinetica dell'elettrone) la seguente relazione:

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Introducendo l'ipotesi di quantizzazione del momento angolare dell'elettrone (cui de Broglie darà, nel 1924, un'interpretazione radicalmente nuova, postulandone la natura ondulatoria)

$$L = m_e v r = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

ed eliminando v tra la prima e la terza equazione si ottiene:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2$$

dove abbiamo aggiunto il pedice n per indicare la quantizzazione del raggio orbitale; conseguentemente l'energia diventa:

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$$

Dall'ipotesi di quantizzazione del momento angolare seguono quindi la quantizzazione del raggio orbitale e dell'energia: l'elettrone, nel modello di Bohr, non può orbitare ad una distanza qualsiasi dal nucleo, ma solo

a distanze che sono multipli quadratici del raggio minimo $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$;

le energie permesse sono sottomultipli quadratici dell'energia fondamentale $E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -13,6 \text{ eV}$ (energia di legame dell'atomo di idrogeno).

L'elettrone passa dal livello fondamentale ($n = 1$) ad uno eccitato assorbendo un fotone di energia

$$E_{1,n} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$$

cui corrispondono le righe dello spettro di assorbimento alle frequenze:

$$v_{1,n} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}$$

decade invece da un livello eccitato al fondamentale, oppure ad uno eccitato ma di energia inferiore, emettendo un fotone di energia

$$E_{n_1, n_2} = \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \quad n_2 > n_1$$

ovvero di frequenza

$$v_{n_1, n_2} = \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} \quad n_2 > n_1$$

relazione che può scriversi anche nella forma:

$$\frac{1}{\lambda_{n_1, n_2}} = \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \quad n_2 > n_1$$

dove $R_H = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1,097 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ è la costante di Rydberg.

Per $n = 1$ e $n = 2$ si hanno, rispettivamente, le serie di righe spettrali di Lyman e Balmer.

Le tre righe misurate da Pickering, le prime due nel visibile, la terza nell'infrarosso, non sono interpretabili all'interno del modello di Bohr dell'atomo di idrogeno, dal momento che implicano numeri quantici semiinteri, contrariamente alle ipotesi. Si può supporre, soluzione cui del resto guida il testo del problema, che tali righe appartengano allo spettro di un atomo di numero atomico superiore.

2

Dalla relazione fornita si ottiene

$$R_H = \frac{1}{\lambda \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{4n^2}{\lambda(n^2 - 4)} \quad \text{che, con i valori sperimentali di } \lambda, \text{ fornisce}$$

n	λ (nm)	R_H (nm ⁻¹)	R_H (m ⁻¹)
3	656,3	0,01097	$1,097 \cdot 10^7$
4	486,1	0,01097	$1,097 \cdot 10^7$
5	434,1	0,01097	$1,097 \cdot 10^7$
6	410,2	0,01097	$1,097 \cdot 10^7$
7	397,0	0,01097	$1,097 \cdot 10^7$

Esplicitando invece n , si ottiene,

$$n = \sqrt{\frac{4\lambda R_H}{\lambda R_H - 4}} \quad \text{da cui, sostituendo i valori sperimentali di } \lambda,$$

λ (nm)	n
455,1	4,49 = 9/2
541,1	3,50 = 7/2
1012,3	2,50 = 5/2

3

$$\frac{1}{\lambda} = R'_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = 4R_H \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{n_2^2} \right) = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{n_2^2} \right) = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(\frac{n_2}{2}\right)^2} \right)$$

Per n_2 pari si ottengono le righe di Balmer, per $n_2 = 5, 7, 9$ le righe di Pickering.

4

Per un atomo idrogenoide la forza coulombiana e l'energia sono proporzionale a Ze^2 (Z = numero atomico), per cui la relazione richiesta si può ottenere a partire dalle equazioni relative all'atomo di Bohr semplicemente sostituendo e^2 con Ze^2 :

$$\frac{1}{\lambda_{n_1, n_2}} = \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \frac{Z^2 m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} = R'_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad n_2 > n_1$$

con $R'_H = Z^2 R_H$

che, nel caso di Zeta Puppis, consente di individuare la presenza dello ione He^+ .

QUESTIONARIO

Quesito n. 1

Dal testo non è chiaro cosa si possa assumere come noto (la densità di energia del campo magnetico? l'energia di un'induttanza percorsa da corrente?). In ogni caso, ai fini di questo documento, dal momento che le dimostrazioni sono reperibili su qualunque testo, assumiamo il caso più semplice, ovvero

$$u_B = \frac{U_B}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{2\mu_0 U_B}{V}}$$

Nell'approssimazione di campo uniforme, valida quando il solenoide ha dimensioni longitudinali molto maggiori rispetto alle dimensioni trasversali, si ha:

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} i \Rightarrow i = \frac{BL}{\mu_0 N} = \frac{L}{\mu_0 N} \sqrt{\frac{2\mu_0 U_B}{V}} = \frac{L}{N} \sqrt{\frac{2U_B}{\mu_0 V}} = \frac{0,050 \text{ m}}{500} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}}{12,57 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}} = 1,1 \text{ A}$$

Notiamo che nel caso in esame, assumendo per semplicità una sezione quadrata per il solenoide, questo ha lunghezza $L = 5,0 \text{ cm}$ e lato di base $d = 2,0 \text{ cm}$, per cui la condizione $L \gg d$ è solo approssimativamente assoluta.

Quesito n. 2

I due punti possono essere trattati simultaneamente.

Nel solenoide L_2 si produce un campo magnetico uniforme che varia linearmente nel tempo; il solenoide L_1 è pertanto sottoposto alla variazione del flusso di un campo magnetico, che induce in esso il passaggio di corrente. Si ha

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I = \mu_0 \frac{N}{L} kt \Rightarrow |f.e.m.| = \left| -\frac{d}{dt} \Phi(\vec{B}) \right| = \frac{d}{dt} NS_1 \mu_0 \frac{N}{L} kt = \frac{\mu_0 N^2 k S_1}{L}$$

La costanza della *f.e.m.* indotta in L_1 è dovuta all'andamento lineare della corrente in L_2 in ogni intervallo. Il caso della variazione lineare del flusso del campo inducente è l'unico in cui il campo indotto non varia nel tempo. Inserendo i valori numerici forniti si ottiene:

$$|f.e.m.| = \frac{\mu_0 N^2 k S_1}{L} = \frac{12,57 \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \cdot 500^2 \cdot 0,50 \text{ A s}^{-1} \cdot 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{0,050 \text{ m}} = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

C'è tuttavia da rilevare che, nella situazione descritta, dal momento che i due solenoidi hanno la stessa lunghezza, l'effetto di bordo appare non trascurabile, per cui il sistema è lontano dalla condizione ideale.

Quesito n. 3

a) Un tratto di lunghezza L contiene energia

$$U = W \Delta t = \frac{WL}{c} = 3,3 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

b) L'energia del precedente tratto del fascio laser può essere espressa tramite la densità di energia dei campi elettrico e magnetico che costituiscono l'onda e.m.; con l'usuale significato delle variabili:

$$U = (u_E + u_B)V = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{eff}^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_{eff}^2 \right) S \cdot L$$

ricordando che i contributi energetici dovuti al campo elettrico e magnetico sono uguali, si ha quindi:

$$U = 2 \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{eff}^2 S \cdot L = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\sqrt{2} E_{eff})^2 S \cdot L = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{MAX}^2 S \cdot L$$

da cui si ricava il valore massimo del campo elettrico:

$$E_{MAX} = \sqrt{\frac{2U}{\varepsilon_0 S L}} = 1,9 \cdot 10^4 \text{ V/m}$$

Infine, dalla relazione $B = \frac{E}{c}$ segue:

$$B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

- c) Il laser emette, nel tempo $\Delta t = 1 \text{ s}$, N fotoni di energia $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, per cui si ha:

$$N \frac{hc}{\lambda} = W \Delta t \Rightarrow \frac{N}{\Delta t} = \frac{W \lambda}{hc} = 2,6 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1}$$

Quesito n. 4

- a) L'energia di un fotone deve essere superiore l'energia di estrazione dell'elettrone:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} > eV_0 \Rightarrow \lambda < \frac{hc}{eV_0} = \lambda_{MAX} = 2,41 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 241 \text{ nm}$$

- b) La corrente è data dal rapporto tra la quantità di carica che attraversa il sistema in un determinato tempo di osservazione e il tempo stesso; considerando l'efficienza della cella si ottiene:

$$I = \frac{N_{elettroni} e}{\Delta t} = \frac{0,75 \cdot N_{fotoni} e}{\Delta t} \Rightarrow N_{fotoni} = \frac{I \Delta t}{0,75 e} = 1,25 \cdot 10^{14}$$

Quesito n. 5

La velocità relativa tra le due astronavi è

$$v_{rel} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{0,90c + 0,75c}{1 + \frac{0,90c \cdot 0,75c}{c^2}} = 0,985c \rightarrow 0,99c$$

La lunghezza di un'astronave, misurata da un passeggero dell'altra vale pertanto:

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{v_{rel}^2}{c^2}} = 5,9 \text{ m}$$

Nel calcolo sono state utilizzate anche le successive cifre decimali di v , scelta motivata dal fatto che l'unico valore richiesto dal testo è la lunghezza (il valore della velocità è stato esplicitato solo per maggiore chiarezza), quindi il criterio delle cifre significative è stato applicato sul risultato finale.

Quesito n. 6

L'energia dell'elettrone è classicamente data dalla relazione

$$E_C = \frac{p^2}{2m_e} = e\Delta V \Rightarrow p = \sqrt{2m_e e \Delta V}$$

La lunghezza d'onda di de Broglie è data da:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e e \Delta V}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta V}} \sqrt{\frac{(6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2}{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}} = \sqrt{\frac{1,504 \cdot 10^{-18}}{\Delta V}} \text{ m} = \\ &= \sqrt{\frac{1,504}{\Delta V}} \cdot 10^{-9} \text{ m} = \sqrt{\frac{1,504}{\Delta V}} \text{ nm} \end{aligned}$$

che, per $\Delta V = 50,0 \text{ V}$, fornisce il valore

$$\lambda = 0,173 \text{ nm} = 173 \text{ pm}$$