φ

LA SEZIONE AUREA

Misura dell'armonia matematica

Il bello della matematica...

- **LA SINTESI**: ambiti completamente diversi della matematica convergono nello stesso argomento o concetto

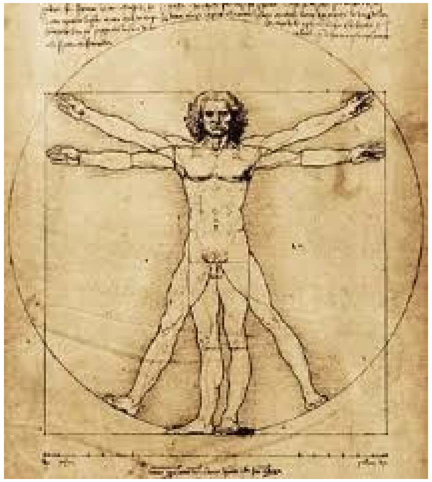
$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

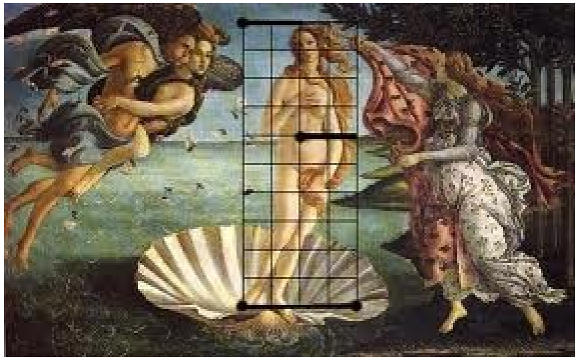
- **IL DIVERTIMENTO**: la matematica nasce ed è amata dai bambini come un gioco e tale dovrebbe restare sempre almeno in un primo approccio

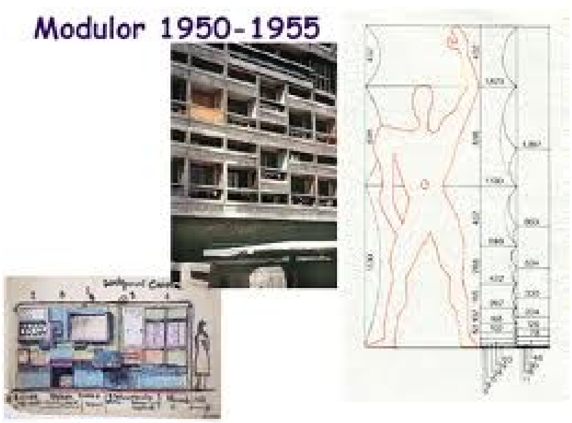
Dio è un bimbo; e quando iniziò a giocare, coltivò la matematica. E' il più divino dei giochi umani - Vinzenz Erath

- **LA SEMPLICITA':** stupore nel vedere scaturire risultati semplici da partenze complicate

Dove eravamo rimasti...

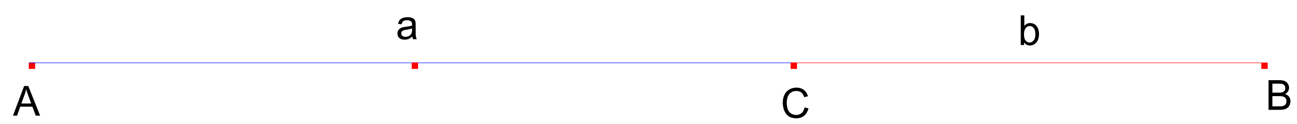






Definizione

La Sezione Aurea [φ] indica il rapporto fra due lunghezze disuguali, delle quali la maggiore è medio proporzionale tra la somma delle due e la minore



$$\boxed{\begin{array}{c}(a + b) : a = a : b \\ \\ \varphi = a/b\end{array}}$$

$a^2 = (a + b)b \qquad a^2 - ab - b^2 = 0 \qquad b \neq 0 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \qquad \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{2} = 1{,}618033...$$

numero irrazionale algebrico (i.e. soluzione di un'equazione a coefficienti interi)

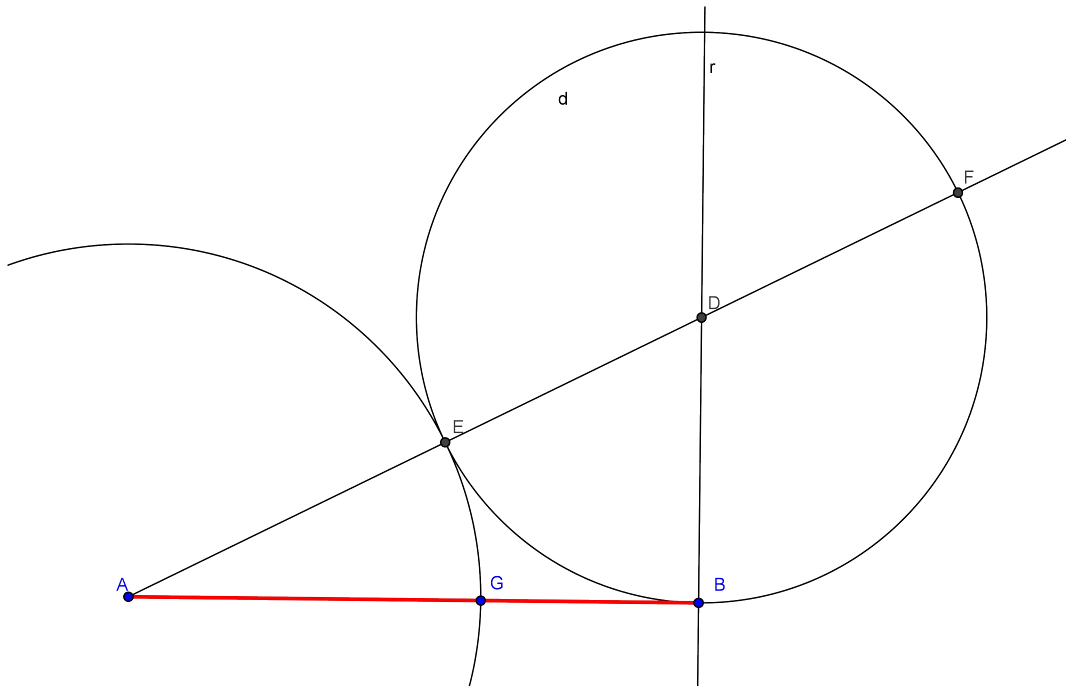
Storia di un nome...

- Conosciuto come rapporto almeno dai **pitagorici (500 a.C)** (pentagono regolare e pentagramma)
- **Euclide di Alessandria 300 a.C.** : si dice che una retta è divisa in *media ed estrema ragione* quando la lunghezza totale della linea sta alla sua parte maggiore come questa sta alla minore
- **Luca Pacioli 1509:** *Divina Proporzione* (dedica interamente un opera al rapporto aureo) ha la pretesa di interpretare la geometria la filosofia le scienze alla luce del rapporto aureo
- **Martin Ohm 1835** : riferisce del termine *sezione aurea* dicendo che da tempo è discretamente diffuso (probabilmente ad introdurlo è stato Leonardo)
- **Mark Barr inizio del 1900**: introduce il simbolo φ dall'iniziale di Fidia

Perchè *divina*

- Il valore unico del rapporto aureo come l'unicità di Dio
- Il rapporto aureo chiama in causa tre grandezze come la Trinità di Dio
- Il rapporto aureo è un numero irrazionale e richiama l'impossibilità dell'intelletto umano di arrivare a Dio
- L'autosimilarità del rapporto aureo, indipendente dalla lunghezza del segmento di partenza da dividere, ricorda l'invariabilità e l'onnipresenza di Dio
- Il rapporto aureo generatore dei solidi platonici come lo Spirito Santo dell'anima dell'uomo

Media ed estrema ragione – Libro VI degli Elementi



AF : AB = AB : AE per il teorema secante e tangente

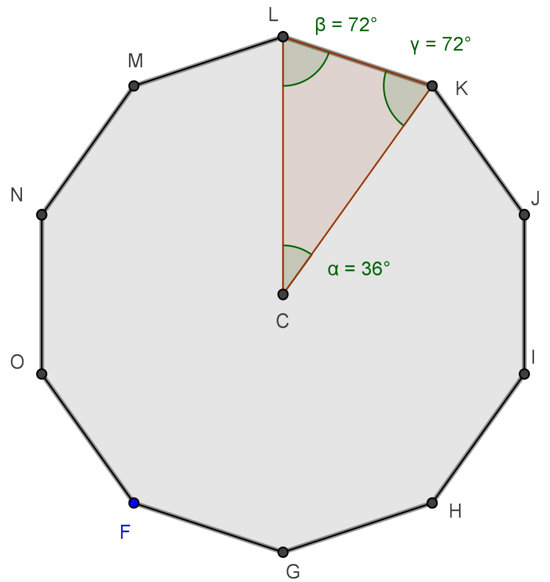
(AF – AB) : AB = (AB – AE) : AE proprietà dello scomporre

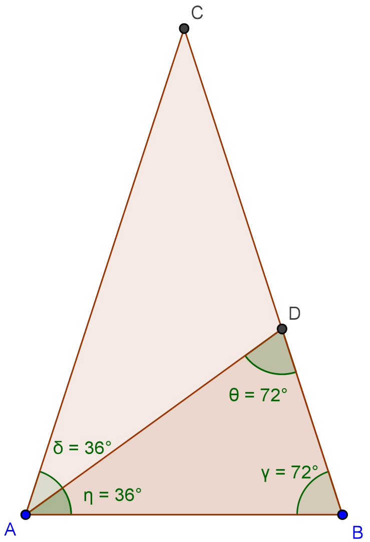
AB = EF e AE = AG quindi AG : AB = GB : AG e dunque

AB : AG = AG : GB

il tutto sta ad una parte come questa sta al rimanente

Decagoni e Pentagoni regolari





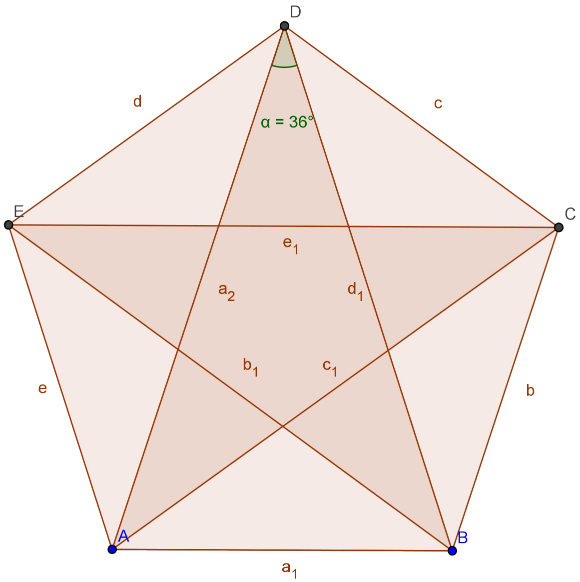
AC : CD = AB : BD per il teorema della bisettrice

AC : AB = AB : (AC – AB) AD = DC = AB , AC = BD

$AB^2 = AC(AC - AB)$, $R^2 - L^2 - RL = 0$, $(R/L)^2 - R/L - 1 = 0$

$R/L = \varphi$

Decagoni e Pentagoni regolari



Ogni angolo interno misura 108°

Le diagonali uscenti da ciascun vertice dividono l'angolo in tre parti uguali ciascuna quindi di 36°

ABD è quindi un triangolo isoscele di angoli 36° 72° 72° e quindi per quanto visto prima nel decagono

$$d / L = \varphi$$

Giocando un po'...

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \quad \varphi^2 = \varphi + 1 \quad \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi \quad \varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 \quad \varphi^5 = \varphi^4 + \varphi^3$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \quad \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1 \quad \varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 = 2\varphi + 1 + \varphi + 1 = 3\varphi + 2 \ldots$$

Una potenza intera qualsiasi di φ è uguale alla somma delle due precedenti, da cui

$\varphi^2 = 1\varphi + 1 \quad \varphi^3 = 2\varphi + 1 \quad \varphi^4 = 3\varphi + 2 \quad \varphi^5 = 5\varphi + 3 \quad \varphi^6 = 8\varphi + 5$

$\varphi^7 = 13\varphi + 8 \ldots$

$1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 13 \ldots \qquad a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ldots$

$$\varphi^n = a_n \varphi + a_{n-1}$$

Giocando un po'...

Consideriamo la seguente radice a struttura nidificata

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}}}}=\ldots$$

$$\varphi^2-\varphi-1=0 \qquad \varphi^2=\varphi+1 \qquad \varphi=\sqrt{1+\varphi}=\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}} \qquad etc\ldots$$

Caratteristica importante autosomiglianza: dovunque mi fermo nella scrittura ciò che “vedo” è esattamente identico a quello che ho precedentemente scritto

FRAZIONE CONTINUA

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5+\ldots}}}}$$

$$[1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ldots]=\varphi$$

$$[a_1;a_2;a_3;a_4;a_5;\ldots]$$

$$\varphi^2=\varphi+1 \qquad \textit{dividendo per}\ \varphi$$

$$\varphi=1+\frac{1}{\varphi}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\varphi}}}=\ldots$$

Le frazioni continue e la sezione aurea

$$1+\frac{1}{1+1}=1+\frac{1}{2}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}=1{,}5$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}=1{,}66666\ldots$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=1+\frac{3}{5}=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}=1{,}6$$

......

Tenendo conto della solita successione di Fibonacci

$$1\ \ 2\ \ 3\ \ 5\ \ 8\ \ 13\ \ldots \qquad a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4\ \ a_5\ \ a_6\ \ldots$$

si ha quindi che $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}}<\phi<\dfrac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \quad n=1,2,3,4,5,\ldots$

Successione di Fibonacci definita per ricorsione $a_0=1\,,\ a_1=1 \qquad a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

Definizione costruttiva della successione numerica: per determinare un termine a_n devo determinare tutti gli *n-1* termini precedenti .... *molto scomodo!*

OBIETTIVO: **determinare una funzione *f(n)* tale che a_n = *f(n)***

Abbiamo prima visto che $\varphi^n=a_n\varphi+a_{n-1}$

Analogamente si può verificare che $(1-\varphi)^n=a_n(1-\varphi)+a_{n-1}$ essendo $1-\varphi$ la seconda soluzione dell'equazione $x^2=x+1$

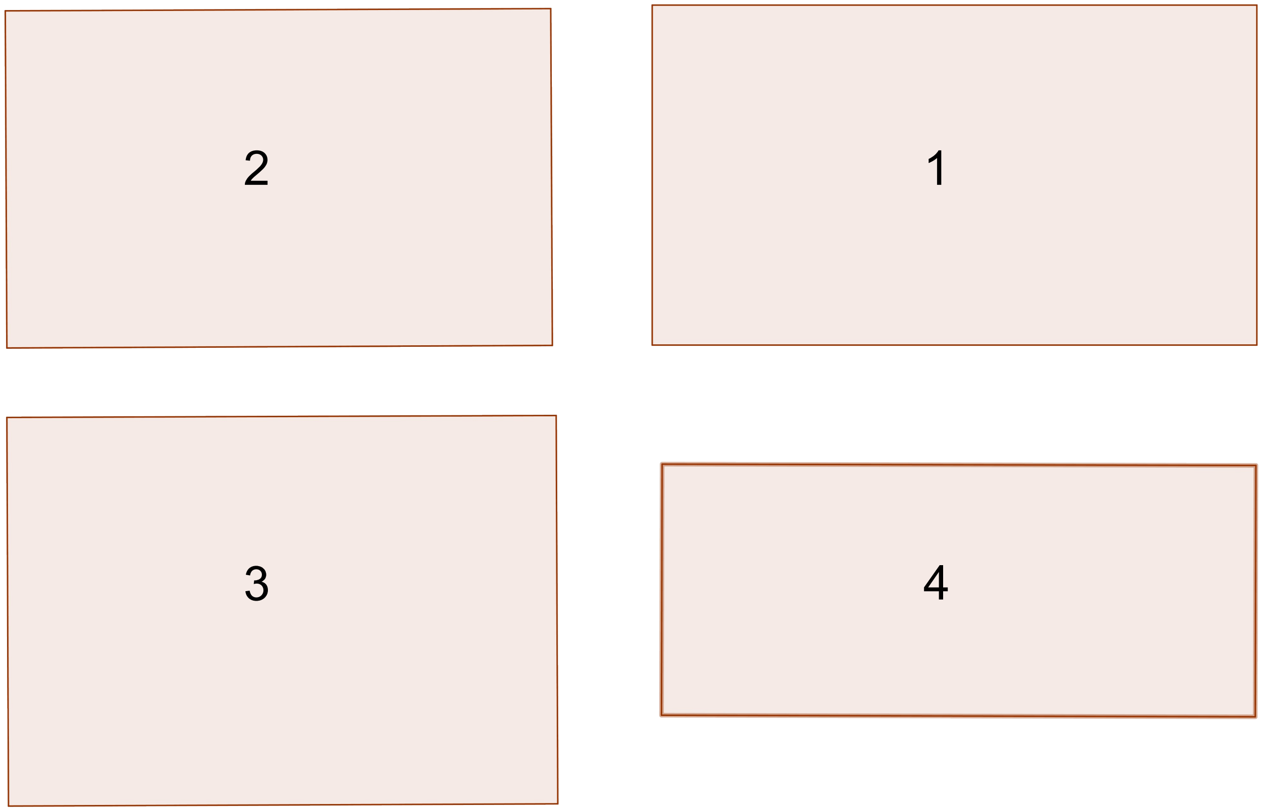
e sottraendo membro a membro le due espressioni si ottiene

$$\varphi^n-(1-\phi)^n=a_n\varphi+a_{n-1}-a_n(1-\phi)-a_{n-1}=2\mathrm{a}_n\phi-a_n=(2\phi-1)a_n=\sqrt{5}a_n$$

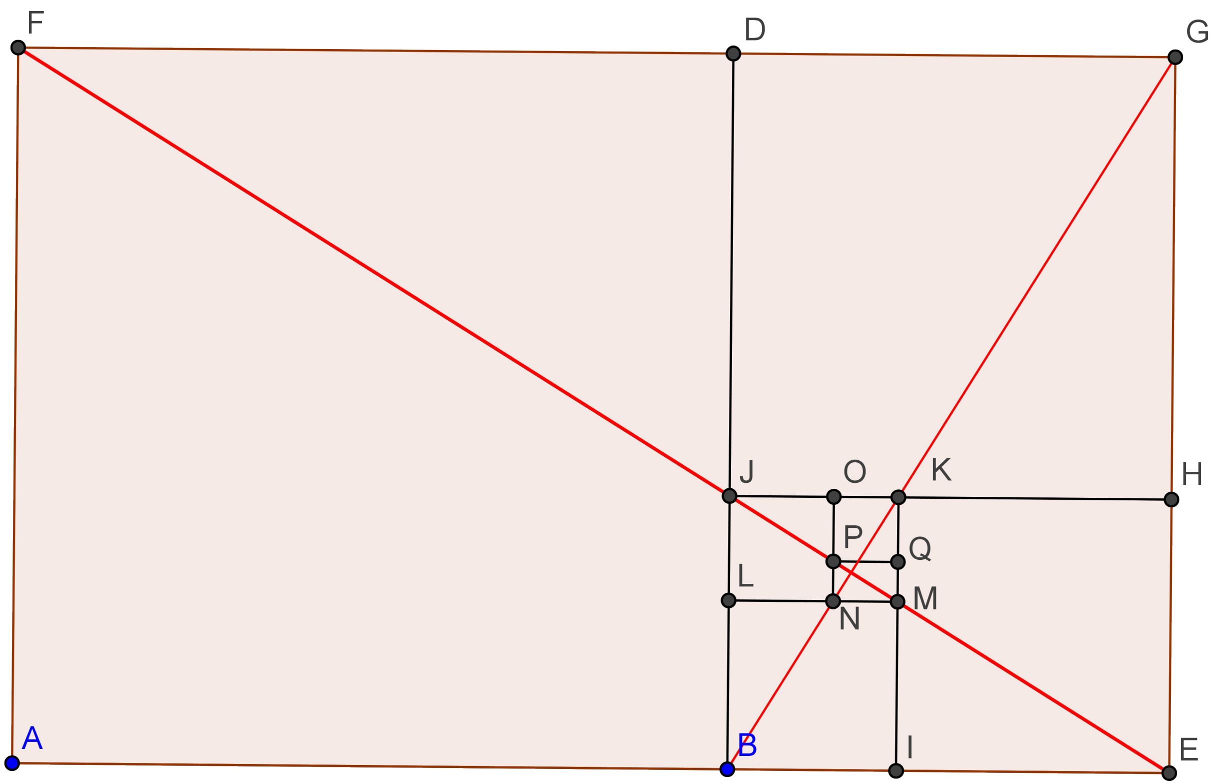
$$a_n=\frac{\phi^n-(1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

FORMULA DI BINET

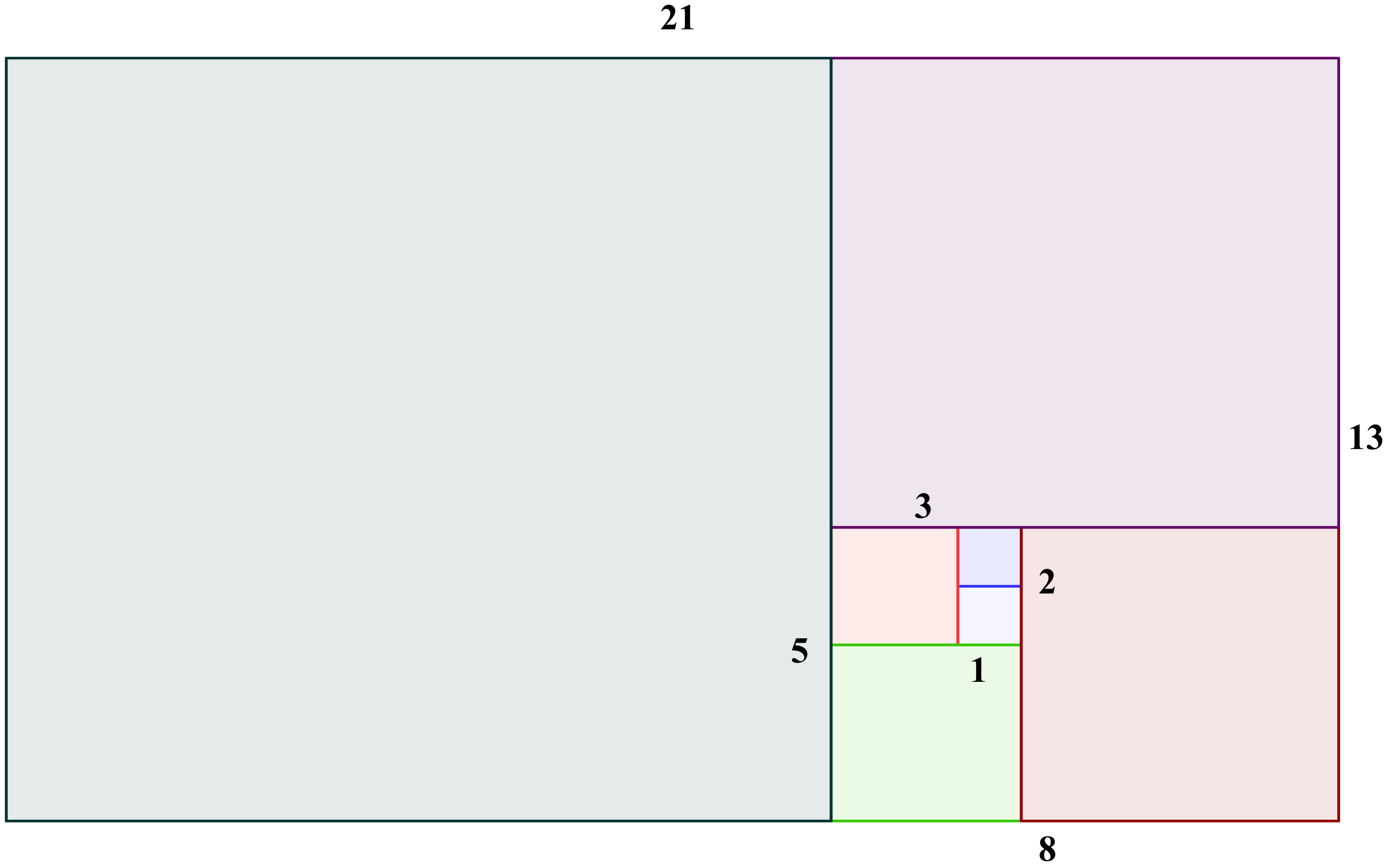
Rettangoli



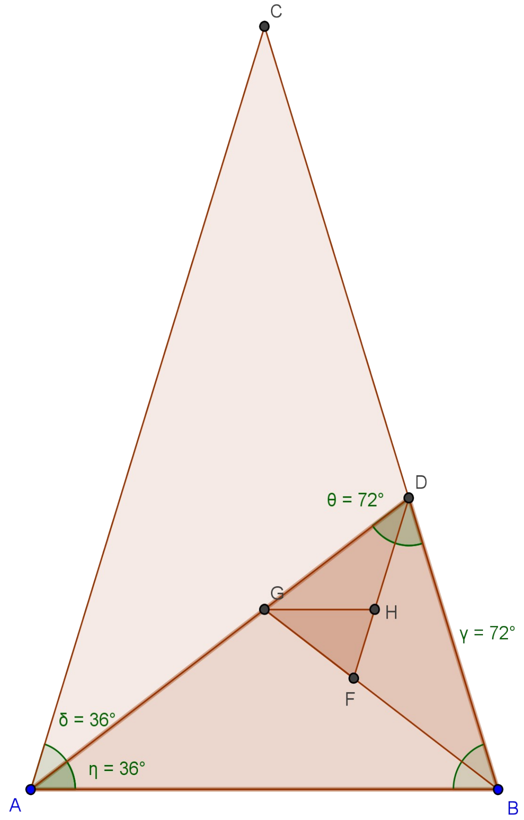
Rettangolo aureo



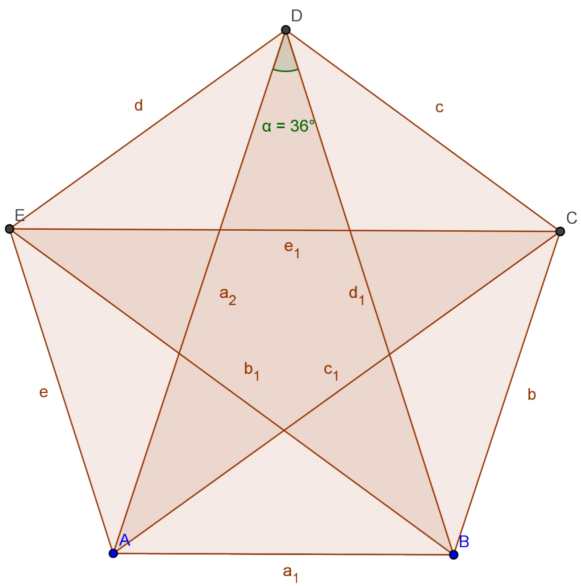
Rettangolo aureo e Fibonacci

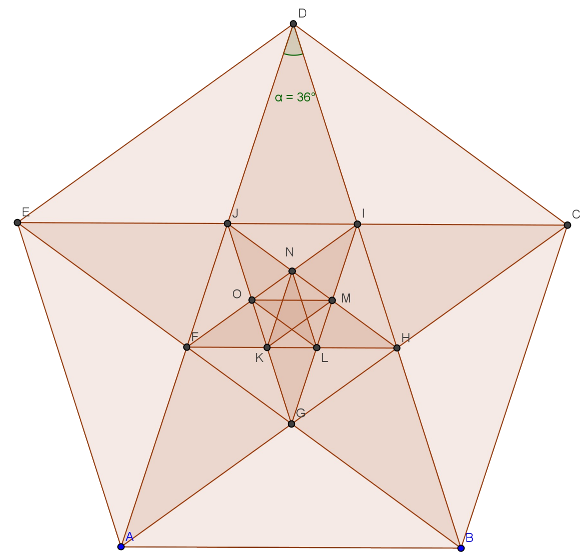


Triangolo aureo



Pentagono stellato





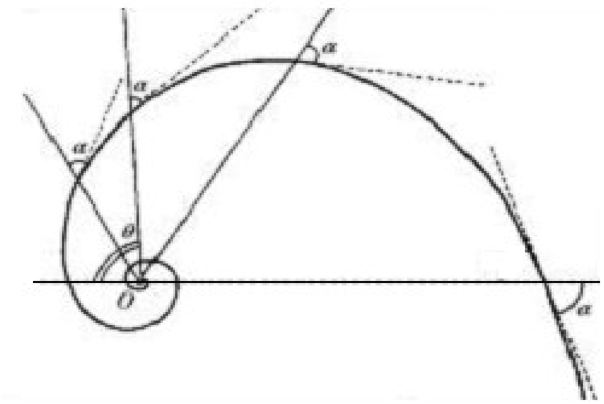
Spirale logaritmica: $\rho = a\,e^{k\vartheta}$ (coordinate polari)

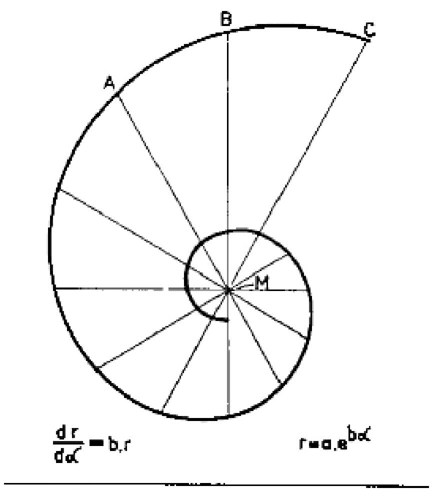
PROPRIETA

- **Autosomiglianza** (*spira mirabilis*) : avvicinadosi o allontanandosi dall'origine rimane simile a se stessa (*Eadem mutata resurgo* – Epitaffio di Bernoulli)

- **Equiangolarità:** gli angoli formati dalla tangente ad un punto della curva ed una semiretta uscente dal polo e passante per il punto stesso sono tutti congruenti

- **Media ed estrema ragione**: Quando i tre raggi MA, MB e MC formano degli angoli uguali tra di loro, il raggio centrale MB è medio proporzionale tra il più piccolo MA ed il più grande MC: MA:MB=MB:MC



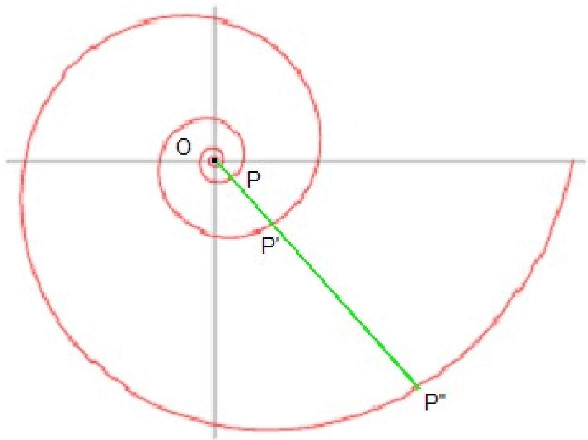


Spiral logaritmica: $\rho = a\,e^{k\vartheta}$ (coordinate polari)

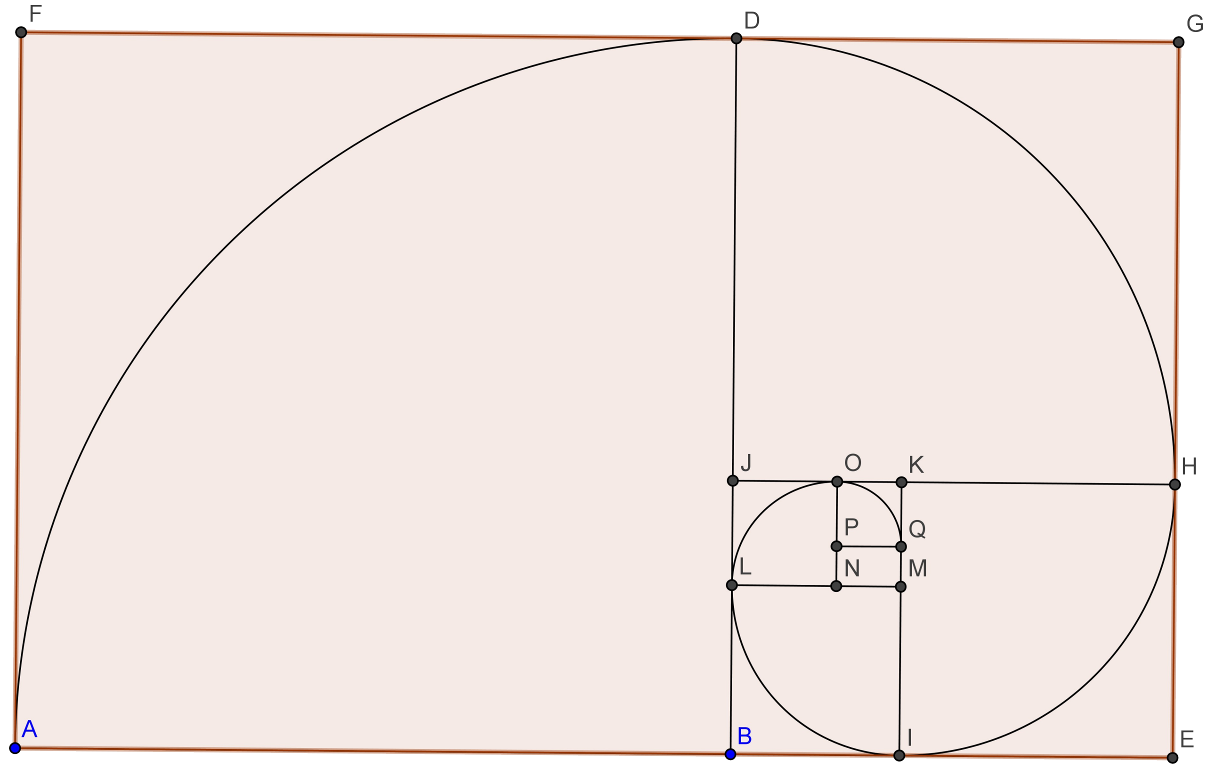
PROPRIETA

- **Successione geometrica** dei segmenti intercettati dalla spirale su di un raggio uscente dal polo

- **Asintoticità del polo**, ossia la curva percorre un numero infinito di spire che si addensano intorno ad esso senza arrivarvi mai.

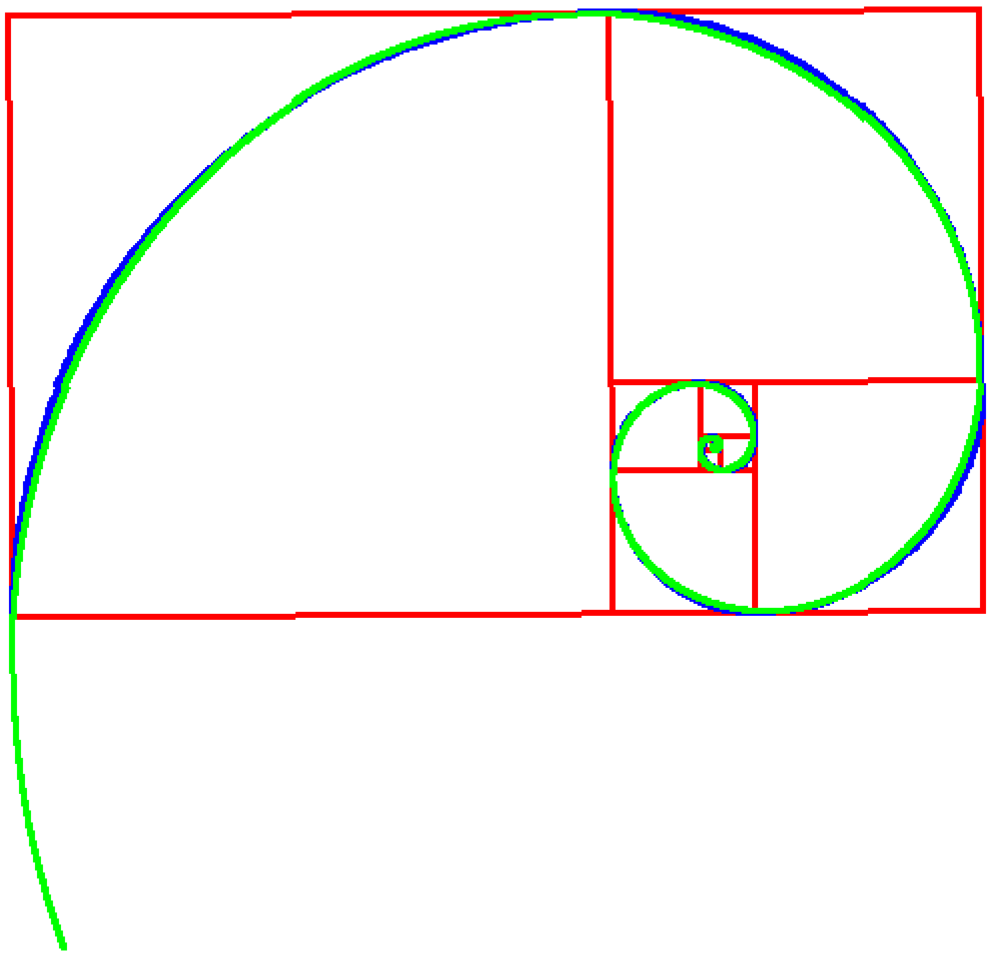


Spirale logaritmica e rettangolo aureo

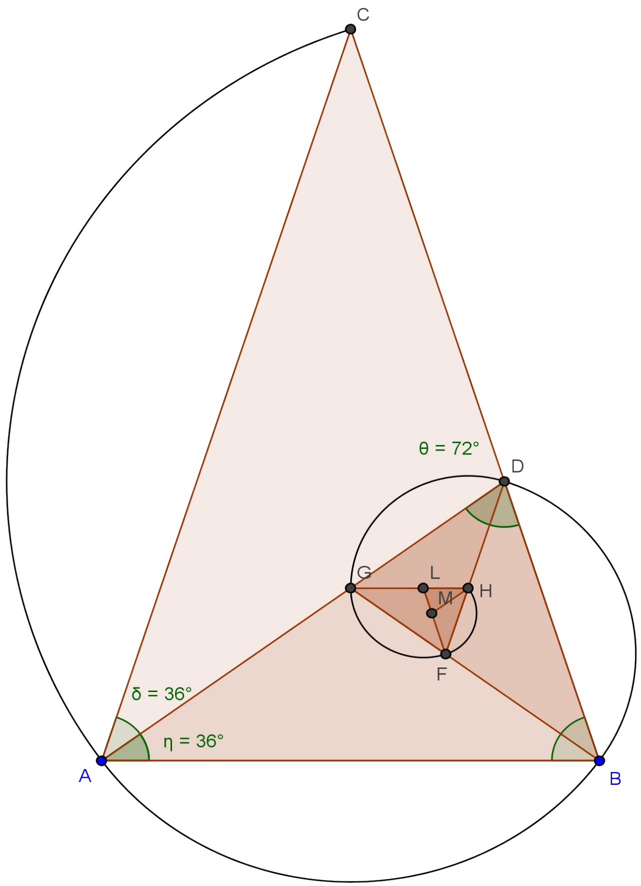


Spirale logaritmica e rettangolo aureo

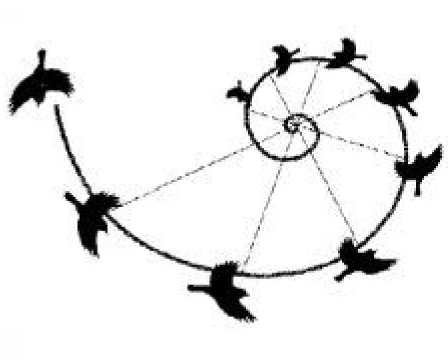
Confronto tra spirale logaritmica aurea (in verde) e la sua costruzione mediante il rettangolo aureo (in blu)



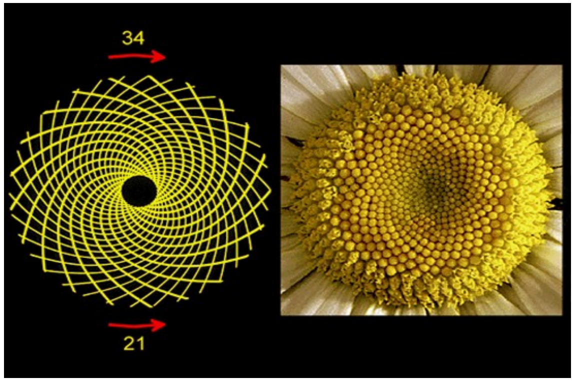
Spirale logaritmica e triangolo aureo



Spirale logaritmica in natura

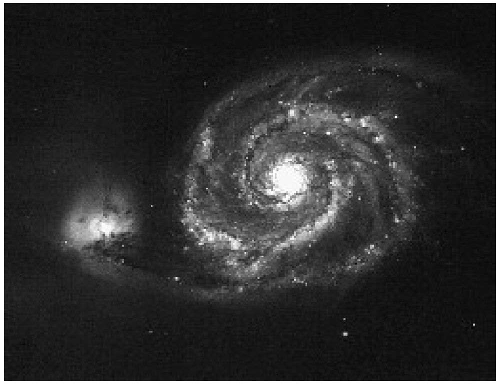


La planata del falco pellegrino
sulla preda



Disposizione dei semi di girasole

Il nautilus



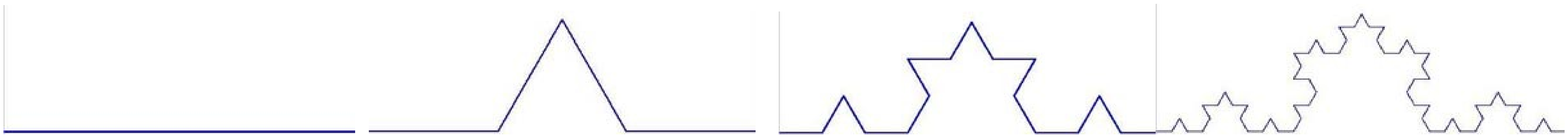
La galassia M51

Frattali e numero aureo

Frattale = oggetto geometrico di dimensione non intera (*fractus*) - Fu introdotto nel 1975 dal francese Mandelbrot

Tra le sue principali caratteristiche vi è *l'autosimilarità*: cambiando la scala si vede sempre la stessa forma geometrica

IL MERLETTO DI KOCH



Ogni segmento viene diviso in tre parti di uguale ampiezza e quella centrale sostituita con due lati di un triangolo equilatero

Dimensione frattale

Dato un oggetto di una certa dimensione quanti oggetti più piccoli simili ad esso ed uguali tra loro servono per formarlo?

Se dividiamo a metà (fattore di riduzione F = ½) un segmento (dim = 1) si formano 2 segmenti uguali
Se dividiamo i lati di un quadrato (dim = 2) in due parti uguali si formano 4 quadrati uguali (2^2)
Se dividiamo i lati di un cubo (dim =3) in due parti uguali si formano 8 cubi uguali (2^3)

Analogamente se procediamo con un fattore di riduzione F = 1/3 otterremo rispettivamente 3 segmenti, 9 quadrati, 27 cubi

Definiamo D dimensione frattale quel valore che verifica la seguente relazione:

$$N = (1/F)^D$$

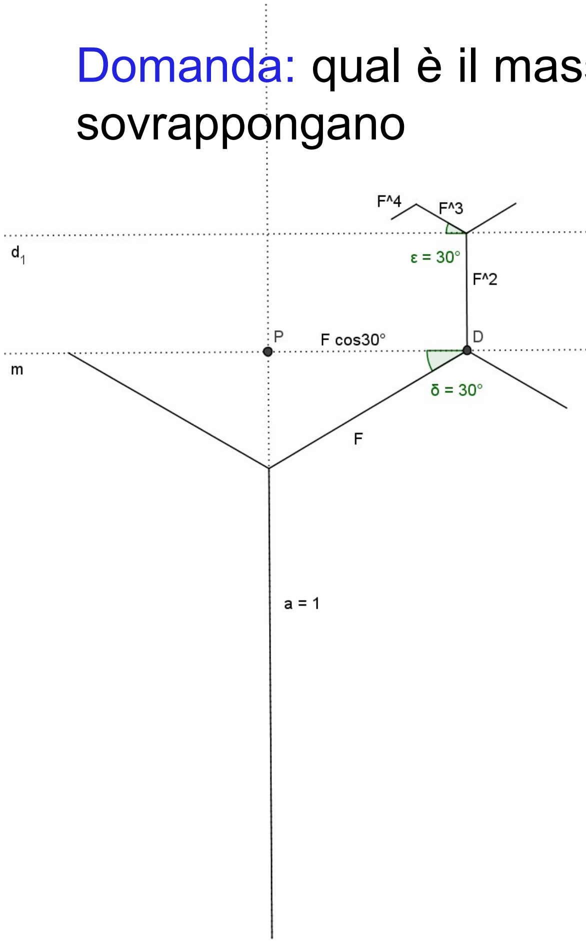
Essendo N il numero di oggetti autosimili prodotti con un fattore di riduzione F.
E operando con i logaritmi

$$D = \frac{\log N}{\log 1/F}$$

Albero aureo

Albero frattale: a partire dall'estremo di un segmento ***a*** si costruiscono simmetricamente ad esso, con apertura di 120°, due segmenti di lunghezza **F*a*** con **0 < F <1**

Domanda: qual è il massimo fattore F affinchè i rami dell'albero sono si sovrappongano



$$F\cos 30° = F^3\cos 30° + F^4\cos 30° + F^5\cos 30° + \dots$$

$$F = F^3(1+F+F^2+\dots) = F^3\frac{1}{1-F}$$

$$1 = \frac{F^2}{1-F} \qquad F^2+F-1=0 \qquad F = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\phi} = 0{,}618\dots$$