IL MONDO È MATEMATICO?

(C. Bartocci* al Convegno di Varenna, ottobre 2004).

Alcuni anni or sono un filosofo tedesco, Hans Jonas, intitolò un suo breve saggio: *Dio è un matematico?* (a cura di C. Angelino, Il Melangolo, Genova 1995). Chi vi parla, non essendo un filosofo, e tantomeno tedesco, non ha quella dimestichezza con la divinità che è appannaggio, pare, di questa classe di lavoratori (i filosofi, intendo). Sposterò dunque la domanda a un livello più elementare: il mondo è matematico? Ovvero, detto in maniera ancora più terra terra, per evitare che alla parola "mondo" si attribuisca un senso troppo profondo: le cose che ci circondano e di cui abbiamo esperienza diretta hanno qualcosa a che vedere con la Matematica?

Vorrei innanzitutto ricordare per sommi capi una concezione che ha radici molto antiche, una concezione che in prima approssimazione esprime il punto di vista tradizionale, almeno per quanto riguarda gli scienziati, di considerare il rapporto tra i fenomeni e la loro descrizione in linguaggio matematico. Solo più avanti farò le mie controdeduzioni.

Eugene Paul Wigner (1902÷1995) - un grande fisico teorico di origine ungherese, che nel 1963 fu insignito del premio Nobel per i suoi contributi ai fondamenti e ai metodi della Meccanica quantistica - viene spesso citato anche per un breve saggio di intento più o meno divulgativo (la storia della scienza insegna che le idee importanti o gli interrogativi di fondo non trovano espressione soltanto negli articoli specialistici). In questo scritto, il cui titolo è *L'irragionevole efficacia della Matematica nelle Scienze della natura* (*The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, "Communications in Pure and Applied Mathematics", vol. 13, 1960), Wigner si pone una domanda elementare: come mai la Matematica si dimostra così utile per formulare le leggi della natura?

In altri termini, che cosa ha a che fare il linguaggio simbolico di una disciplina che viene spesso percepita come astrusa, arbitraria, lontana dalla natura, con la descrizione di fenomeni disparati quali la caduta delle mele, il movimento degli astri, la divisione cellulare, la dinamica delle popolazioni, l'interazione tra specie in un ecosistema? La nostra educazione scolastica ci ha abituati a incontrare formule matematiche un po' dappertutto: ma è davvero inevitabile che sia così e, nel caso, perché? Personalmente, ritengo che si dovrebbe assumere - diciamo così - un atteggiamento scientifico anche di fronte a una domanda di questo genere e cercare dunque di stabilire se si tratta di un mistero insondabile, oppure di qualcosa che si può spiegare in qualche modo oppure ancora di una verità lapalissiana. Vi anticipo fin d'ora che, naturalmente, non fornirò alcuna risposta definitiva, anche perché non conosco risposte definitive. Soprattutto vorrei soltanto gettare qualche seme di dubbio in chi mi ascolta.

È chiaro che l'interrogativo sollevato da Wigner non rappresenta una novità. Basta infatti avere una seppur vaga familiarità con la storia del pensiero occidentale per rendersi conto che la questione si ricollega a quello che potremmo denominare il problema della intelligibilità del mondo. Il problema, ovviamente, non si pone come conseguenza dello straordinario sviluppo della scienza del '900 ma ha radici molto, molto lontane, che affondano nel ricco humus della cultura dell'antica Grecia.

Nel pensiero greco si riscontra (semplificando) una opposizione fondatrice tra due concezioni antitetiche, ma in fondo complementari.

Da una parte, c'è chi sostiene - come Eraclito - che "la natura ama nascondersi".

Dall'altra, c'è chi ha invece fiducia - Parmenide forse per primo - nell'unità dell'essere e nel potere del logos di decifrare la natura senza bisogno, per così dire, di praticare nessun rito misterico.

Il logos è sia la parola, sia il ragionamento. Si può, anzi, meglio, si deve argomentare secondo ragione, discutere soppesando le varie possibilità, circoscrivere discorsivamente la verità per stanarla: così ci insegna Platone nei *Dialoghi*. Ma non è tutto. Questa fiducia nell'unità dell'essere e nell'intelligibilità del mondo si combina da subito (non voglio certo abborracciare una lezione di Filosofia, ma fissare qualche riferimento) a una concezione i cui caratteri originari sono in verità piuttosto diversi, la concezione pitagorica.

Qual è l'insegnamento di Pitagora? Leggiamo quel che scrive Aristotele nella *Metafisica* [Libro A, 985b, 33 - 968a, 3]: "[...ai Pitagorici] pareva evidente che tutte le altre cose modellassero sui numeri la loro intera natura e che i numeri fossero l'essenza primordiale di tutto l'universo fisico; e per tutte queste ragioni essi concepirono gli elementi dei numeri come elementi di tutta la realtà, e l'intero cielo come armonia e numero" (trad. A. Russo, Laterza, Bari 1990, pp. 20-21).

Questa concezione pitagorica, in accordo alla quale "tutto è disposto secondo il numero", è raccolta - come si sa - da Platone. Nella *Repubblica* si sostiene che la migliore preparazione per il filosofo consiste nello studio della Matematica ed è noto il motto scolpito all'ingresso dell'Accademia: "non entri chi non è geometra". Il mondo delle idee - si può dire - è essenzialmente matematico.

Non caso la più stringente argomentazione a sostegno della teoria dell'anamnesi è fornita dall'apologo dello schiavo di Menone, che "ricorda" le dimostrazioni della Geometria euclidea pur senza averle mai studiate.

Le grandi correnti del platonismo e del pitagorismo - e in seguito, più propriamente, del neoplatonismo e del neopitagorismo - non di rado mescolate insieme in uno stesso calderone filosofico, influenzano in maniera determinante la cultura occidentale. Incidono profondamente su Aristotele (che, beninteso, cerca di confutarle per fondare una nuova concezione dell'essere), stanno alla base delle idee geometriche degli *Elementi* di Euclide e del successivo commento di Proclo (V secolo d.C.), costituiscono la matrice comune dello gnosticismo e del cristianesimo primitivo. In apparenza, sembrano scomparire (o quasi) dalla scena filosofica per un lunghissimo periodo di quasi mille anni ma in realtà non perdono la loro vitalità, sopravvivendo nel pensiero cabalistico e nella tradizione alchemica. Infine, riemergono con forza nell'ermetismo rinascimentale, come hanno dimostrato eloquentemente gli studi ormai classici di Francis Yates (si veda in particolare, *Giordano Bruno e la tradizione ermetica*, Laterza, Bari 1985).

La scienza moderna è figlia, non figliastra, della tradizione pitagorico-platonica. La cosmologia geometrica di Keplero - dal *Mysterium cosmographicum* (1596) all'*Harmonices mundi libri V* (1619) - si rifà in modo esplicito a questa matrice filosofica. Galileo, non solo si dichiara convinto che il "libro della natura è scritto in caratteri matematici" ma arriva al punto di individuare esplicite anticipazioni copernicane nel *Timeo* di Platone.

Newton, imbevuto di letture alchemiche, include Pitagora nel ristretto novero degli antichi saggi detentori della prisca sapientia e vede nella dottrina dell'armonia delle sfere celesti una prefigurazione della propria teoria della gravitazione universale.

Certo, non vi è alcun dubbio che il metodo scientifico con i suoi esperimenti quantitativi sia molto distante dal misticismo numerologico. Eppure, la lettura galileiana della concezione pitagorico-platonica si perpetua sostanzialmente inalterata per circa trecento anni, fino all'inizio del '900, costituendo una dei cardini su cui si fonda quella che chiamerei la Fisica classica: la Fisica di Newton, Eulero, Laplace, Lagrange, Fourier e anche (con qualche approssimazione) la Fisica di Faraday, Maxwell, Boltzmann, Einstein (Einstein è a tutti gli effetti ancora un "fisico classico").

Secondo questo paradigma, che domina quasi incontrastato la scienza moderna, nell'indagine dell'universo fisico, alla Matematica spetta un ruolo privilegiato, che non si limita ad essere descrittivo ma rispecchia ben precise credenze ontologiche (e in queste credenze si riconoscono chiaramente le antiche radici pitagoriche). In effetti, il mondo si lascia matematizzare in maniera completa e - attenzione - univoca: le leggi che lo regolano, per quanto recondite, per quanto astruse possano essere, sono in ogni caso leggi matematiche, che non possono essere sostituite con altre leggi. Il libro della natura è, almeno in linea di principio, completamente decifrabile dal filosofo-geometra, come lo chiama Galileo, che padroneggi l'alfabeto e la lingua nel quale è scritto, nello stesso modo in cui un messaggio in codice viene decrittato una volta che sia nota la chiave.

Questa idea della "leggibilità matematica" del mondo - rubiamo l'espressione a Hans Blumenberg, autore di un dotto saggio intitolato appunto *La leggibilità del mondo* (Il Mulino, Bologna 1984) - è l'assunto fondamentale su cui hanno poggiato per tre secoli tutte le Filosofie naturali incentrate sul meccanicismo e sul determinismo in senso laplaciano, un assunto che il positivismo ha esteso ben oltre l'ambito della Fisica fino a includere i fenomeni sociali, economici, politici. Aderendo a tale concezione, non soltanto si sostiene che il mondo è matematico ma anche - più sottilmente - che lo è in modo unico e completo.

Non si ammettono descrizioni matematiche ugualmente valide ma non coincidenti né si ammettono (se non per provvisoria ignoranza) descrizioni matematiche parziali. In altri termini, esiste una perfetta consonanza - un isomorfismo - tra l'insieme dei fenomeni fisici e l'insieme delle leggi matematiche che colgono l'essenza di quei fenomeni. Per fare un esempio, la teoria della Relatività Generale è giusta se e solo se è vera, cioè se descrive il mondo così come realmente è.

Impostata così la questione, sembra che, nel rispondere alla domanda dalla quale siamo partiti - il mondo è matematico? - siamo di fronte a un aut aut. Se rispondiamo di sì, allora siamo costretti ad abbracciare la concezione platonico-pitagorica, riveduta e corretta in chiave galileiana. Se rispondiamo di no, allora dobbiamo abbandonare ogni speranza di comprendere e spiegare il reale su base razionale. Ma davvero *tertium non datur*? Davvero non c'è un'altra via?

Sono convinto che vi sia un'altra via o per meglio dire: la scienza del '900 ci ha mostrato che esiste un'altra via. Non è affatto necessario che il cosmo sia opera di un grande orologiaio, di un architetto, di un sommo geometra; non è affatto necessario credere che ci sia un libro della natura oppure molti libri della natura o una biblioteca della natura per spiegare il potere esplicativo della Matematica.

Il nesso di inesorabile consequenzialità che la concezione platonica-pitagorica vorrebbe stabilire tra intelligibilità del mondo e univocità delle descrizioni matematiche non sussiste, è un'illusione ottica, una fatamorgana.

L'irragionevole efficacia della Matematica, si può spiegare in un modo diverso e, credo, più semplice. Detto in due parole: occorre sostituire all'idea del filosofo-geometra, del decifratore, un'idea molto più modesta del matematico come artigiano, come inventore di soluzioni ingegnose ma provvisorie, come apprendista della verità, come umile forgiatore di modelli.

Facciamo un passo indietro. Chiediamoci: di che cosa parla la Matematica?

Nella tradizione platonica, la Matematica parla di oggetti ben precisi: numeri, triangoli, funzioni continue, frattali... È definita e determinata dai suoi oggetti di studio: questi oggetti non si sa bene dove allignino - forse nell'empireo delle idee, forse nel "terzo mondo" di Popper, forse nello spazio delle configurazioni neuronali del cervello di *Homo sapiens sapiens* - ma di certo sono (si asserisce che siano) lo specchio fedele del *logos* (un logos, per altro, che ha una natura altrettanto incerta).

Proviamo a dare una risposta diversa: la Matematica non studia gli oggetti, ma le relazioni tra gli oggetti. Forse quel che sto dicendo potrà suonare strano, ma vi invito a prendere alla lettera la mia definizione. Le relazioni tra le cose sono i fatti della Matematica nel medesimo senso in cui il campo elettomagnetico, ad esempio, è un fatto della Fisica o l'evoluzione è un fatto della Biologia.

Che cosa vuol dire che su questo tavolo ci sono due bottiglie? In che modo si accorda con quello che stavo dicendo prima? Semplice. L'asserzione "ci sono due bottiglie" è un'asserzione di relazione: l'insieme costituito dalle bottiglie su questo tavolo si può mettere in relazione con tutti gli altri insiemi costituiti da due oggetti. L'operazione di contare che eseguiamo per concludere che "ci sono due bottiglie su questo tavolo" si riduce a stabilire delle relazioni. Non dobbiamo fare riferimento a nessuna idea platonica di numero "2", conservato come un metro campione in qualche reame remoto, ma soltanto costruire una relazione con altri insiemi. Una relazione che in sé non è più "irragionevolmente efficace" dell'atto di prendere una di queste bottiglie e versare un po' d'acqua nel bicchiere.

Consideriamo la Geometria euclidea piana. Questa non è altro che lo studio degli "spostamenti rigidi" di poligoni, circonferenze, eccetera, nel piano. Quali sono le relazioni? Pensiamo alla teoria dei triangoli così come sviluppata negli *Elementi*: due triangoli sono uguali (o se preferite: congruenti, come si usa dire a scuola) soltanto se si possono sovrapporre operando traslazioni e rotazioni (ma non riflessioni). I vari teoremi servono a stabilire condizioni sufficienti affinché si possano stabilire queste relazioni. Se ammetto la possibilità di operazioni diverse (come dilatazioni omogenee, proiettività o quant'altro), allora studio relazioni diverse e costruisco teorie geometriche diverse: tutti i triangoli con gli stessi angoli potranno essere "uguali" o al limite (considerando un gruppo di trasformazioni abbastanza grande) tutti i triangoli saranno "uguali" tra loro.

Ad esempio, se adottiamo un punto di vista topologico, addirittura tutti i poligoni risultano indistinguibili perché è possibile deformarli con continuità fino a trasformarli in una circonferenza.

Per citare le parole di Henri Poincaré, solo in apparenza paradossali, "la Matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse".

Abbracciando il punto di vista relazionale, si arriva alla conclusione che per lo scienziato che matematico non è - per il fisico o per il biologo - non sono tanto i risultati della matematica a essere utili, quanto le definizioni. Proprio così. Le definizioni che ci dicono che cos'è una sezione conica, che cos'è un frattale, che cos'è un gruppo - questi enunciati precisi che isolano questi concetti tra tutti quelli possibili nella rete infinita delle relazioni - sono ciò che soprattutto risulta utile nelle applicazioni.

Paul Valéry, il poeta del "rigore immaginativo", ebbe occasione di annotare nei suoi *Cahiers* (vol. II, Gallimard, Paris 1988, p. 780) che la "Matematica è il regno dell'arbitrario". Credo che le sue parole colgano nel segno e possano aiutarci a comprendere l'importanza delle definizioni.

In effetti, le definizioni sono arbitrarie, anche se naturalmente devono essere *rigorose* ovvero rispettare i vincoli logici imposti dal sistema formale nel quale si inseriscono. Tuttavia, la loro arbitrarietà non è sinonimo di anarchia: esiste un nesso dialettico tra definizioni e teoremi.

Soltanto dalle buone definizioni scaturiscono buoni teoremi così come i buoni teoremi (cioè quelli non inutilmente generali) suggeriscono le buone definizioni. Sfortunatamente, questo legame di interpendenza viene quasi sempre cancellato nei manuali di Matematica, che ci presentano le definizioni come se nascessero come Atena dalla testa di Zeus, armate di tutto punto.

D'altra parte, anche la storia della Matematica ci insegna che così non è.

Se consideriamo ad esempio l'opera fondatrice di Euclide, dovremmo ricordarci che dietro le definizioni apparentemente semplici o addirittura ingenue degli *Elementi* sta una tradizione di molti secoli, che risale alle pratiche di agrimensura degli antichi Egizi.

Nello stesso modo, lungo e tortuoso è il percorso che ha condotto alla definizione di funzione continua o a quella di gruppo o a quella di spazio vettoriale. Cerchiamo di venire al punto.

Se la Matematica ha per oggetto di studio le relazioni tra le cose, allora non abbiamo ragione di credere che vi sia un modo unico di esprimere queste relazioni, né di credere che queste relazioni colgano in qualche modo l'essenza ultima del mondo che ci circonda. Insomma, rispetto alla concezione platonico-pitagorica, si dovrebbe forse assumere una maggiore prudenza epistemologica e una maggior modestia filosofica: nessuno è il depositario della chiave universale per decifrare la realtà, nemmeno i matematici.

Come ha osservato André Weil nei suoi *Ricordi di apprendistato* (a cura di C. Bartocci, Einaudi, Torino 1994), la Matematica è solo uno dei tanti specchi in cui si riflette la verità, anche se forse con più purezza che non in altri specchi.

Se accettiamo questa interpretazione del pensiero matematico, allora l'idea fondamentale diventa quella di *modello*.

Che cos'è un modello matematico? Il concetto di modello matematico si precisa, nella sua accezione moderna, verso la fine dell''800, nell'opera profondamente innovatrice di Henri Poincaré (1854÷1912), geniale figura di matematico, fisico e filosofo. Poincaré è stato forse il primo che, nei suoi scritti di riflessione sulla scienza, ha scardinato l'impianto epistemologico di Galileo, di Keplero, di Newton, asserendo esplicitamente la possibilità di descrizioni matematiche non univoche dei fenomeni fisici e confutando ogni pretesa di universalità.

Ne *La scienza e l'ipotesi* (1902), riferendosi alle interpretazioni della teoria di Maxwell, Poincaré scrive: "Fra tutte queste spiegazioni possibili come effettuare una scelta per la quale ci viene a mancare l'ausilio dell'esperienza? Verrà forse il giorno in cui i fisici smetteranno di interessarsi a questioni di questo genere, inaccessibili ai metodi positivi, e le lasceranno ai metafisici. Ma quel giorno non è ancora arrivato: l'uomo non si rassegna così facilmente a ignorare eternamente il fondo delle cose." (*La scienza e l'ipotesi*, a cura di C. Sinigaglia, Bompiani, Milano 2003, p. 325).

Un modello matematico non aspira a cogliere l'essenza ultima dei fenomeni ma si limita a fornire un'analogia formale che permetta di rappresentarne alcuni aspetti: un modello non ci dice come funzionano le cose ma soltanto che le cose funzionano "come se". Vedete bene che, dal punto di vista epistemologico, le pretese dei modelli sono ben poco ambiziose.

Il primo ad aver formulato in maniera esplicita la nozione di modello in tutta la sua generalità è stato John von Neumann (1903÷1957), uno dei più versatili scienziati del '900: logico matematico e studioso dei fondamenti della Meccanica quantistica, creatore (insieme con Oskar Morgenstern) della Teoria dei giochi, pioniere della Computer science e della Teoria degli automi.

Citiamo le parole di von Neumann: "per modello si intende un costrutto matematico che, con l'aggiunta di certe interpretazioni verbali, descrive dei fenomeni osservati. La giustificazione di un costrutto matematico del genere è soltanto e precisamente che ci si aspetta che funzioni - cioè che descriva correttamente i fenomeni di un'area ragionevolmente ampia. Inoltre, esso deve soddisfare certi criteri estetici - cioè, rispetto alla quantità di informazione che fornisce, deve essere piuttosto semplice".

Riassumendo, le caratteristiche fondamentali dei modelli matematici sono di essere locali, non unici, parziali, non normativi. Non sono altro che "frammenti di matematica incollati su frammenti di realtà" (G. Israel, *La visione matematica della realtà*, Laterza, Roma-Bari, 1997), con zone di sovrapposizione o - talvolta - addirittura di incompatibilità. Il fatto di accettarli come "empiricamente adeguati" (per usare un'espressione di van Fraassen) non implica nessuna asserzione ontologica riguardo ai fenomeni cui si applicano.

Per la stessa ragione, non dobbiamo stupirci se, a volte, le cose non funzionano troppo bene, se le approssimazioni risultano grossolane, se le assunzioni si rivelano ingiustificate a un esame più approfondito. Il metodo fondamentale della modellistica matematica è l'analogia matematica.

La Fisica teorica - tanto la Meccanica newtoniana, quanto la Relatività e la Meccanica quantistica - è l'ambito scientifico in cui l'interpretazione pitagorico-platonica è stata senza dubbio predominante (da Galileo e Newton fino a Einstein e Dirac). E possiamo dire che sia predominante ancor oggi: la teoria delle stringhe si fonda sul presupposto che esista una "teoria del tutto" in grado di spiegare tutta la realtà fisica, dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande. D'altra parte, in settori disciplinari quali la Biologia, le Scienze sociali o le Scienze economiche, la modellistica matematica si è dimostrata l'unica strada percorribile per trattare in qualche modo la complessità dei fenomeni da studiare.

Vorrei concludere questa chiacchierata esaminando alcuni esempi.

Torniamo a parlare di Keplero, ma considerando un aspetto diverso del suo genio: prima l'ho dipinto come un campione della visione platonico-pitagorica; ora ravviserò in lui un antesignano della modellistica matematica. Questa apparente incongruenza non deve stupire più di tanto.

Astronomo, matematico, estensore di oroscopi (quasi) infallibili alla corte praghese di Rodolfo II, il grande Keplero fu figura ambivalente di un'epoca di transizione, in cui i confini tra magia naturale e filosofia naturale erano ancora incerti e sfumati. Il suo misticismo di stampo neoplatonico (o, se si preferisce, neopitagorico) si coniuga con un'approfondita conoscenza della Matematica del suo tempo e con un'insaziabile curiosità che lo spinge ad esplorare i fenomeni più disparati, dalle orbite dei pianeti fino alla struttura a celle esagonali di un favo d'api.

Nel 1611 Keplero compone, come regalo di capodanno per il suo benefattore di allora, John Matthew Wacker von Wackenfels, un curioso trattatello dal titolo *Strena seu de nive sexangula*

(Strenna, ossia della neve esagonale). "Deve esistere - osserva - una causa precisa per la quale, ogni qualvolta comincia a cadere la neve, le sue formazioni iniziali presentano invariabilmente la forma di una stellina a sei punte. Se ciò accade per caso, infatti, perché non ne cadono anche a cinque, o a sette, punte?"

Partendo dalla ferma convinzione che il mondo sia organizzato secondo leggi matematiche, Keplero riesce a svelare il mistero della simmetria esagonale dei fiocchi di neve costruendo quello che oggi chiameremmo un "modello". Se infatti si ragiona "come se" la materia fosse composta da atomi (a quei tempi, rammentiamolo, un'ipotesi pericolosamente in odore di eresia), la simmetria esagonale è infatti una conseguenza diretta del fatto che oggetti rotondi delle stesse dimensioni stipati il più densamente possibile su una superficie piana formano una configurazione a nido d'ape.

Potete fare un piccolo esperimento usando delle monete uguali tra loro: mettete al centro una moneta, disponete sei monete attorno ad essa e otterrete una figura il cui contorno si inscrive in un esagono. In termini più matematici, se proviamo a sistemare dei cerchi in un piano in modo che occupino la minor area possibile, ecco che i centri di questi cerchi corrispondo ai vertici di triangoli equilateri, e questi triangoli compongono esagoni regolari.

Detto per inciso, l'analogo problema per sfere dello stesso raggio nello spazio tridimensionale è molto, molto più difficile da risolvere: che queste sfere, affinché il volume complessivo sia minimo, vadano disposte come farebbe qualsiasi bravo fruttivendolo quando impila mele o arance, è stato dimostrato rigorosamente soltanto nel 1998 da Thomas Hale (la dimostrazione, a dire il vero, non è stata ancora unanimamente accettata come valida dalla comunità scientifica; si veda il libro di George G. Szpiro *Kepler's conjecture*, John Wiley & Sons, Hoboken (NJ) 2003).

Ma come spiegare la struttura fine di un fiocco di neve, quelle delicate ramificazioni simili a microscopiche felci che lo rendono diverso da ogni altro? Nonostante il suo genio, Keplero deve arrendersi di fronte a questi interrogativi. Per trovare possibili risposte occorre infatti una Matematica molto diversa da quella conosciuta alla fine del '500, una Matematica che ha iniziato a svilupparsi e a crescere rigogliosamente soltanto negli ultimi cinquant'anni.

Nuovi strumenti concettuali - Geometria frattale, Teoria della complessità, Teoria dei sistemi dinamici - consentono di studiare la struttura nascosta di configurazioni naturali anche più elaborate di quella di un fiocco di neve: spruzzi, arcobaleni, onde e dune di sabbia, piume, fiori, conchiglie, nuvole (una guida eccellente per avventurarsi in questi nuovi territori della ricerca è offerta dal volume di Ian Stewart *Che forma ha un fiocco di neve?*, Bollati Boringhieri, Torino 2003).

Per tentare una descrizione matematica di oggetti complessi che presentano caratteristiche individuali che li distinguono da tutti quelli della stessa specie - non esistono due fiocchi di neve uguali o due nuvole uguali - non c'è altra via, in generale, che ingegnarsi a costruire dei modelli.

Non possiamo certo partire dalla Meccanica quantistica per capire la struttura fine di un cristallo di neve. Dobbiamo fare ipotesi ad hoc, escogitare qualche equazione differenziale non lineare, far girare un programma di simulazione su un computer abbastanza potente e sperare che l'immagine che compare alla fine sul video non sia troppo dissimile da quella di un fiocco di neve reale.

Così procedono, in genere, gli scienziati quando tentano di descrivere in termini matematici i fenomeni complessi del mondo biologico.

L'ingegnere olandese Balthasar Van der Pol (1889÷1959), in un articolo del 1928 scritto in collaborazione con Van der Mark, propone un sistema di equazioni differenziali non lineari che dovrebbero descrivere il comportamento oscillatorio di un insieme piuttosto variegato di fenomeni diversi: "l'arpa eolica, un martello pneumatico, il rumore cigolante di un coltello su un piatto, lo sventolio di una bandiera al vento, il rumore ronzante che fa talvolta un rubinetto d'acqua, [...] la manifestazione periodica di temporali dopo una depressione atmosferica, i brividi di freddo, il ciclo mestruale e, infine, i battiti del cuore" (in G. Israel, op. cit., pp. 28-29).

Che cosa hanno in comune i fenomeni di questa lista così eterogenea? Nulla. Nessuna argomentazione teorica li accomuna, nessuna legge fisica li unisce. Le equazioni di Van der Pol non costituiscono altro che un modello matematico, fondato soltanto su un'analogia piuttosto vaga: i comportamenti oscillatorî di questi fenomeni, una volta rappresentati nel piano angolo di rotazione-

-velocità angolare, sono simili alle "oscillazioni con rilassamento" che si osservano in particolari circuiti elettrici.

In altre parole, Van der Pol azzarda una sorta di metafora matematica, senza pretendere di cogliere in nessun modo il fondo delle cose. Una metafora che, nel caso specifico del battito cardiaco (ma non in altri), si è dimostrata calzante e proficua (oggi, con gli enormi progressi della Fisiologia, esistono modelli più raffinati, ma l'idea fondamentale rimane quella originaria).

Ancora, si può accennare alle architetture geometriche che si nascondono nella conchiglia del nautilo. Una volta sezionata sagittalmente, questa rivela - come tutti sanno - le volute di una perfetta spirale logaritmica.

Il primo a cercare di capire il perché dell'apparire della spirale logaritmica in molti fenomeni di accrescimento biologico fu probabilmente D'Arcy Wentworth Thompson (1860÷1948). Zoologo eterodosso, cultore di studi classici (tradusse la *Historia animalium* di Aristotele e compose un *Glossario degli uccelli greci* e un *Glossario dei pesci greci*, in cui elencò tutti gli uccelli e i pesci menzionati nelle opere della letteratura greca antica), D'Arcy Thompson era fermamente convinto che anche nel mondo organico, in apparenza disordinato, capriccioso e instabile, si celino numerose strutture matematiche, di affascinante bellezza ed eleganza.

La sua opera più importante a questo riguardo è *Crescita e forma*, la cui prima edizione risale al 1917 (trad. it. dell'edizione ridotta a cura di J.T. Bonner, Bollati Boringhieri, Torino 1992). Benché molte delle ipotesi azzardate da D'Arcy Thompson si siano successivamente dimostrate del tutto campate in aria, l'importanza del suo lavoro pionieristico viene oggi unanimamente riconosciuta.

In particolare, la spirale logaritmica (che si ritrova non solo nella conchiglia del nautilo, ma anche nelle conchiglie di vari Gasteropodi e negli scheletri di diversi Foraminiferi, nell'infiorescenza del girasole o nella fillotassi di alcune piante) offre un semplice modello matematico per numerosi processi di accrescimento, anche estranei al mondo organico. Serve ad esempio a spiegare la forma a spirale di molte galassie.

Il modello è basato su una costruzione geometrica ben nota ai Greci: aggiungere a un figura piana una "cornice" (il termine tecnico è gnomone) in modo che la figura risultante conservi le medesime proporzioni di quella originaria.

Concedetemi un ultimo esempio prima di concludere. La dinamica dell'interazione di una popolazione di prede con una popolazione di predatori è descritta da un'equazione differenziale non lineare detta di Volterra-Lotka. Verso la metà degli anni '20, lo zoologo Umberto D'Ancona aveva suggerito a Vito Volterra di studiare il problema delle fluttuazioni di alcune popolazioni di pesci dell'Adriatico: il modello proposto da Volterra era lo stesso, in alcuni casi particolari, di quello ricavato da Alfred James Lotka per descrivere l'interazione di due specie di insetti, l'una parassita dell'altra. Parlando di "teoria matematica della lotta per l'esistenza", lo stesso D'Ancona annota: "[questa teoria] non è sorta quale derivazione dallo studio sperimentale o dall'osservazione del comportamento in natura delle associazioni, ma è stata elaborata in maniera puramente teorica, partendo da alcuni presupposti presi da osservazioni sperimentali o da considerazioni ritenute verosimili e compatibili con quanto si verifica in natura" (U. D'Ancona, *La lotta per l'esistenza*, Einaudi, Torino 1942, p. 295).

L'equazione di Volterra-Lotka costituisce dunque un modello, nel senso di von Neumann, che fornisce una descrizione approssimativa di un'interazione preda-predatore (la Biologia matematica studia oggi modelli più sofisticati, anche se in ogni caso semplificati rispetto a ciò che accade davvero in un ecosistema complesso).

La Matematica ci dice qualcosa sui fenomeni naturali, questo dovrebbe essere ormai chiaro: la struttura del cavolfiore è adeguatamente descritta dalla Geometria frattale; alcuni processi di morfogenesi si classificano grazie alla Teoria delle catastrofi; la struttura tridimensionale delle proteine si può studiare con l'ausilio della Teoria dei nodi; le macchie sulla pelliccia del leopardo si spiegano attraverso meccanismi di rottura della simmetria; la dinamica delle reazioni biochimiche all'interno di una cellula sembra obbedire alle leggi della Teoria delle reti.

Ma in tutti questi esempi, così come in quelli di cui abbiamo discusso più diffusamente in precedenza, i modelli funzionano soltanto sulla base di analogie matematiche, che non ambiscono a cogliere l'essenza ultima dei fenomeni.

Possiamo dunque credere o, se preferite, "fare finta" che il mondo sia matematico. Ma dobbiamo rinunciare a credere che la descrizione del mondo che ci viene offerta dai modelli matematici sia unica. Sono sempre possibili, almeno in linea di principio, altre descrizioni non meno efficaci.

Studiare i modelli matematici può forse aiutarci a non dimenticare un insegnamento che, credo, ha una portata generale. La scienza è buona scienza quando è modesta.

* Claudio Bartocci è docente di Fisica matematica all'Università di Genova. Collabora regolarmente con La Stampa e con Il Manifesto. E' membro del Comitato scientifico per le manifestazioni "Matematica e cultura: Venezia 2004" e "Festival della scienza 2003".