Induzione e combinatoria

Dipartimento di Informatica, Università di Verona

Verona, 23 aprile 2008

Alcuni problemi

- Si dimostri che, per ogni $k \in N$, la somma dei primi k numeri naturali pari è $k^2 + k$.
- Si dimostri che $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 1$.
- Si dimostri che ogni insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

Il principio di induzione

Principio di Induzione: Sia $\{\mathcal{P}(k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ un insieme di proposizioni tali che:

1. $\mathcal{P}(0)$ è vera;
2. per ogni $n \geq 0$, se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Allora $\mathcal{P}(k)$ è vera per ogni $k \in \mathbf{N}$.

Il principio di induzione

Principio di Induzione: Sia $\{\mathcal{P}(k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ un insieme di proposizioni tali che:

1. $\mathcal{P}(0)$ è vera;
2. per ogni $n \geq 0$, se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Allora $\mathcal{P}(k)$ è vera per ogni $k \in \mathbf{N}$.

Dim: Sia $M = \{m \in \mathbf{N} \mid P_m \text{ è falsa}\}$.

Il principio di induzione

Principio di Induzione: Sia $\{\mathcal{P}(k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ un insieme di proposizioni tali che:

1. $\mathcal{P}(0)$ è vera;
2. per ogni $n \geq 0$, se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Allora $\mathcal{P}(k)$ è vera per ogni $k \in \mathbf{N}$.

Dim: Sia $M = \{m \in \mathbf{N} \mid P_m \text{ è falsa}\}$. Supponiamo che l'insieme $M \subseteq N$ sia non vuoto;

Principio di Induzione: Sia $\{\mathcal{P}(k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ un insieme di proposizioni tali che:

1. $\mathcal{P}(0)$ è vera;
2. per ogni $n \geq 0$, se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Allora $\mathcal{P}(k)$ è vera per ogni $k \in \mathbf{N}$.

Dim: Sia $M = \{m \in \mathbf{N} \mid P_m \text{ è falsa}\}$. Supponiamo che l'insieme $M \subseteq N$ sia non vuoto; sia $\overline{m}$ il minimo di M.

Principio di Induzione: Sia $\{\mathcal{P}(k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ un insieme di proposizioni tali che:

1. $\mathcal{P}(0)$ è vera;
2. per ogni $n \geq 0$, se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Allora $\mathcal{P}(k)$ è vera per ogni $k \in \mathbf{N}$.

Dim: Sia $M = \{m \in \mathbf{N} \mid P_m \text{ è falsa}\}$. Supponiamo che l'insieme $M \subseteq N$ sia non vuoto; sia $\overline{m}$ il minimo di M. Da (1) segue che $\overline{m} \neq 0$, quindi $\overline{m} \geq 1$.

Il principio di induzione

Principio di Induzione: Sia $\{\mathcal{P}(k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ un insieme di proposizioni tali che:

1. $\mathcal{P}(0)$ è vera;
2. per ogni $n \geq 0$, se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Allora $\mathcal{P}(k)$ è vera per ogni $k \in \mathbf{N}$.

Dim: Sia $M = \{m \in \mathbf{N} \mid P_m \text{ è falsa}\}$. Supponiamo che l'insieme $M \subseteq N$ sia non vuoto; sia $\overline{m}$ il minimo di M. Da (1) segue che $\overline{m} \neq 0$, quindi $\overline{m} \geq 1$. Poiché $\overline{m} - 1 \in \mathbf{N}$ e $\overline{m} - 1 \notin M$, la proposizione $P_{\overline{m}-1}$ è vera;

Principio di Induzione: Sia $\{\mathcal{P}(k)\}_{k\in\mathbf{N}}$ un insieme di proposizioni tali che:

1. $\mathcal{P}(0)$ è vera;
2. per ogni $n \geq 0$, se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Allora $\mathcal{P}(k)$ è vera per ogni $k \in \mathbf{N}$.

Dim: Sia $M = \{m \in \mathbf{N} \mid P_m \text{ è falsa}\}$. Supponiamo che l'insieme $M \subseteq N$ sia non vuoto; sia $\overline{m}$ il minimo di M. Da (1) segue che $\overline{m} \neq 0$, quindi $\overline{m} \geq 1$. Poiché $\overline{m} - 1 \in \mathbf{N}$ e $\overline{m} - 1 \notin M$, la proposizione $P_{\overline{m}-1}$ è vera; da (2) si conclude che $P_{\overline{m}}$ è vera, contrariamente all'ipotesi $\overline{m} \in M$.

Esempi

Dimostrare che, per ogni $k \in \mathbf{N}$**,** $\sum_{i=0}^{k} 2i = k^2 + k$

Esempi

Dimostrare che, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $\sum_{i=0}^{k} 2i = k^2 + k$

1. $\sum_{i=0}^{0} 2i = 0^2 + 0;$

Esempi

Dimostrare che, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $\sum_{i=0}^{k} 2i = k^2 + k$

1. $\sum_{i=0}^{0} 2i = 0^2 + 0$;
2. se $\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$, allora $\sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1)^2 + n + 1$;

Esempi

Dimostrare che, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $\sum_{i=0}^{k} 2i = k^2 + k$

1. $\sum_{i=0}^{0} 2i = 0^2 + 0$;
2. se $\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$, allora $\sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1)^2 + n + 1$;

   Infatti $\sum_{i=0}^{n+1} 2i = \sum_{i=0}^{n} 2i + 2(n+1)$.

Esempi

Dimostrare che, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $\sum_{i=0}^{k} 2i = k^2 + k$

1. $\sum_{i=0}^{0} 2i = 0^2 + 0;$
2. se $\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$, allora $\sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1)^2 + n + 1;$

   Infatti $\sum_{i=0}^{n+1} 2i = \sum_{i=0}^{n} 2i + 2(n+1)$. Dall'ipotesi induttiva segue che $\sum_{i=0}^{n+1} 2i = n^2 + n + 2(n+1) = (n+1)^2 + n + 1$.

Esempi

Dimostrare che, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $\sum_{i=0}^{k} 2i = k^2 + k$

1. $\sum_{i=0}^{0} 2i = 0^2 + 0$;
2. se $\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$, allora $\sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1)^2 + n + 1$;

   Infatti $\sum_{i=0}^{n+1} 2i = \sum_{i=0}^{n} 2i + 2(n+1)$. Dall'ipotesi induttiva segue che $\sum_{i=0}^{n+1} 2i = n^2 + n + 2(n+1) = (n+1)^2 + n + 1$.

Avendo verificato sia il passo base che il passo induttivo, possiamo concludere che la formula $\sum_{i=0}^{k} 2i = k^2 + k$ vale per ogni $k \in \mathbf{N}$.

Esempi

Si dimostri che $(1+x)^n \geq 1 + nx$ **per ogni** $n \in \mathbf{N}$ **e per ogni** $x \in \mathbf{R}$**,** $x \geq 1$.

Esempi

Si dimostri che $(1+x)^n \geq 1 + nx$ **per ogni** $n \in \mathbf{N}$ **e per ogni** $x \in \mathbf{R}$**,** $x \geq 1$.

Procediamo per induzione su $n \in \mathbf{N}$.

Esempi

Si dimostri che $(1+x)^n \geq 1 + nx$ **per ogni** $n \in \mathbf{N}$ **e per ogni** $x \in \mathbf{R}$**,** $x \geq 1$.

Procediamo per induzione su $n \in \mathbf{N}$.

1. per ogni $x \in \mathbf{R}$, $(1+x)^0 \geq 1 + 0x$

Esempi

Si dimostri che $(1+x)^n \geq 1 + nx$ **per ogni** $n \in \mathbf{N}$ **e per ogni** $x \in \mathbf{R}$**,** $x \geq 1$.

Procediamo per induzione su $n \in \mathbf{N}$.

1. per ogni $x \in \mathbf{R}$, $(1+x)^0 \geq 1 + 0x$
2. per ogni $x \in \mathbf{R}$, $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$

Esempi

Si dimostri che $(1+x)^n \geq 1+nx$ **per ogni** $n \in \mathbf{N}$ **e per ogni** $x \in \mathbf{R}$**,** $x \geq 1$.

Procediamo per induzione su $n \in \mathbf{N}$.

1. per ogni $x \in \mathbf{R}$, $(1+x)^0 \geq 1+0x$
2. per ogni $x \in \mathbf{R}$, $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+x^2$

Esempi

Si dimostri che $(1+x)^n \geq 1+nx$ **per ogni** $n \in \mathbf{N}$ **e per ogni** $x \in \mathbf{R}$**,** $x \geq 1$.

Procediamo per induzione su $n \in \mathbf{N}$.

1. per ogni $x \in \mathbf{R}$, $(1+x)^0 \geq 1+0x$
2. per ogni $x \in \mathbf{R}$, $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+x^2 \geq 1+nx+x = 1+(n+1)x$

Esempi

Si dimostri che $(1+x)^n \geq 1 + nx$ **per ogni** $n \in \mathbf{N}$ **e per ogni** $x \in \mathbf{R}$**,** $x \geq 1$.

Procediamo per induzione su $n \in \mathbf{N}$.

1. per ogni $x \in \mathbf{R}$, $(1+x)^0 \geq 1 + 0x$
2. per ogni $x \in \mathbf{R}$, $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+x^2 \geq 1+nx+x = 1+(n+1)x$

Quindi si conclude che $(1+x)^n \geq 1 + nx$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 1$

Variante del Principio di Induzione

Principo di induzione: Sia $\{\mathcal{P}(k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ un insieme di proposizioni e sia $l \in \mathbf{N}$ tali che:

1. $\mathcal{P}(l)$ è vera;
2. per ogni $n \geq l$, se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Allora $\mathcal{P}(k)$ è vera per ogni $k \geq l$.

Esercizio: Si dimostri che per ogni $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$.

1. $\sum_{i=1}^{1} 1 \cdot 1! = (2)! - 1$.

Esercizio: Si dimostri che per ogni $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$.

1. $\sum_{i=1}^{1} 1 \cdot 1! = (2)! - 1$.
2. se $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$, allora $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = (n+2)! - 1$.

Esercizi

Esercizio: Si dimostri che per ogni $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$.

1. $\sum_{i=1}^{1} 1 \cdot 1! = (2)! - 1$.
2. se $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$, allora $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = (n+2)! - 1$.
   Poiché $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! + (n+1) \cdot (n+1)!$, per ipotesi induttiva

Esercizio: Si dimostri che per ogni $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$.

1. $\sum_{i=1}^{1} 1 \cdot 1! = (2)! - 1$.
2. se $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$, allora $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = (n+2)! - 1$.
   Poiché $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! + (n+1) \cdot (n+1)!$, per ipotesi induttiva segue
   $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)!(n+2) - 1$.

Principio di Induzione-seconda forma Sia $\{\mathcal{P}(k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ un insieme di proposizioni e sia $l \in \mathbf{N}$ tali che:

1. $\mathcal{P}(l)$ è vera;
2. se $\mathcal{P}(m)$ è vera per ogni $l \leq m < n$, allora $\mathcal{P}(m)$ è vera.

Allora $\mathcal{P}(k)$ è vera per ogni $k \geq l$.

Esempio

Si dimostri che ogni numero naturale maggiore o uguale a 2 **o è primo o è prodotto di primi.**

Esempio

Si dimostri che ogni numero naturale maggiore o uguale a 2 **o è primo o è prodotto di primi.**

1. 2 è un numero primo.

Esempio

Si dimostri che ogni numero naturale maggiore o uguale a 2 **o è primo o è prodotto di primi.**

1. 2 è un numero primo.
2. sia $n > 2$ e supponiamo che per ogni $2 \leq m < n$, m è primo o è prodotto di primi; dobbiamo concludere che n è primo o prodotto di primi.

Esempio

Si dimostri che ogni numero naturale maggiore o uguale a 2 **o è primo o è prodotto di primi.**

1. 2 è un numero primo.
2. sia $n > 2$ e supponiamo che per ogni $2 \leq m < n$, m è primo o è prodotto di primi; dobbiamo concludere che n è primo o prodotto di primi.
   Se n è primo, allora si conclude.

Esempio

Si dimostri che ogni numero naturale maggiore o uguale a 2 **o è primo o è prodotto di primi.**

1. 2 è un numero primo.
2. sia $n > 2$ e supponiamo che per ogni $2 \leq m < n$, m è primo o è prodotto di primi; dobbiamo concludere che n è primo o prodotto di primi.
   Se n è primo, allora si conclude. Se n non è primo, allora esistono due numeri naturali r e s tali che $r < n$, $s < n$ e $n = rs$.

Esempio

Si dimostri che ogni numero naturale maggiore o uguale a 2 **o è primo o è prodotto di primi.**

1. 2 è un numero primo.
2. sia $n > 2$ e supponiamo che per ogni $2 \leq m < n$, m è primo o è prodotto di primi; dobbiamo concludere che n è primo o prodotto di primi.
   Se n è primo, allora si conclude. Se n non è primo, allora esistono due numeri naturali r e s tali che $r < n$, $s < n$ e $n = rs$. Per ipotesi induttiva, r e s o sono primi o sono prodotto di numeri primi;

Esempio

Si dimostri che ogni numero naturale maggiore o uguale a 2 **o è primo o è prodotto di primi.**

1. 2 è un numero primo.
2. sia $n > 2$ e supponiamo che per ogni $2 \leq m < n$, m è primo o è prodotto di primi; dobbiamo concludere che n è primo o prodotto di primi.
   Se n è primo, allora si conclude. Se n non è primo, allora esistono due numeri naturali r e s tali che $r < n$, $s < n$ e $n = rs$. Per ipotesi induttiva, r e s o sono primi o sono prodotto di numeri primi; pertanto n è prodotto di numeri primi.

Attenzione!

Tutti i cavalli sono bianchi

Dato un insieme di n punti del piano, essi sono allineati

Esercizi

- Mostrare che ogni quadrato può essere suddiviso in 6, 8 o 9 quadrati piú piccoli. Per quali altri $k \in \mathbf{N}$ è possibile?
- Dimostrare che $n^3 - n$ è divisibile per 3, per ogni $0 \leq n$.
- Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} < \frac{3}{4}$ (Sugg: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}$)
- Qual'è il numero minimo di mosse per risolvere la torre di Hanoi con n dischi?

Coefficienti binomiali

- Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con n elementi?

Coefficienti binomiali

- Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con n elementi? 2^n.

Coefficienti binomiali

- Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con n elementi? 2^n.
- Quanti sono i sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi?

Coefficienti binomiali

- Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con n elementi? 2^n.
- Quanti sono i sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi? $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Coefficienti binomiali

- Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con n elementi? 2^n.
- Quanti sono i sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi? $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Coefficienti binomiali

- Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con n elementi? 2^n.
- Quanti sono i sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi? $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\sum_{k=0,..n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Coefficienti binomiali

- Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con n elementi? 2^n.
- Quanti sono i sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi? $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\sum_{k=0,..n} \binom{n}{k} = 2^n$.
- $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ (Triangolo di Tartaglia!)

Coefficienti binomiali

- Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con n elementi? 2^n.
- Quanti sono i sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi? $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\sum_{k=0,..n} \binom{n}{k} = 2^n$.
- $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ (Triangolo di Tartaglia!)
- $(x+y)^n = \sum_{k=0,\dots,n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Il triangolo di Tartaglia

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

Il triangolo di Tartaglia

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

Perchè è simmetrico rispetto all'asse?

Esercizi semplici con i binomiali

1. Quanti sono i numeri con 7 cifre che contengono esattamente 3 volte la cifra 2?
2. E' possibile che ogni abitante della Cina abbia un insieme distinto di denti?
3. In quanti modi posso confezionare un cesto di 6 bottiglie di vino avendo a disposizione 3 tipi di vini?
4. In quanti modi posso confezionare un cesto di 6 bottiglie di vino avendo a disposizione 3 tipi di vini, in modo che ci sia almeno una bottiglia di ogni tipo?

1. In quanti modi si può suddividere un poligono convesso con $n+2$ lati in n triangoli, tracciando diagonali che non si intersechino tra loro?

1. In quanti modi si può suddividere un poligono convesso con $n+2$ lati in n triangoli, tracciando diagonali che non si intersechino tra loro?
2. Quante sono le sequenze lunghe $2n$, contententi esattamente n volte $+1$ e n volte -1, aventi somme parziali non negative?

Poligoni e triangoli

Sia $P_0 P_1 \cdots P_n P_{n+1}$ il poligono dato, e sia C_n il numero di suddivioni cercate.

Poligoni e triangoli

Sia $P_0P_1 \cdots P_nP_{n+1}$ il poligono dato, e sia C_n il numero di suddivioni cercate. Fissato $1 \leq k \leq n$ quante sono le suddivisioni che contengono il triangolo $P_0P_kP_{n+1}$?

Poligoni e triangoli

Sia $P_0P_1\cdots P_nP_{n+1}$ il poligono dato, e sia C_n il numero di suddivioni cercate. Fissato $1 \leq k \leq n$ quante sono le suddivisioni che contengono il triangolo $P_0P_kP_{n+1}$? Sono le suddivisioni del poligono $P_0P_1\cdots P_{k-1}P_k$ moltiplicate per le suddivisioni del poligono $P_kP_{k+1}\cdots P_nP_{n+1}$,

Poligoni e triangoli

Sia $P_0P_1\cdots P_nP_{n+1}$ il poligono dato, e sia C_n il numero di suddivioni cercate. Fissato $1 \leq k \leq n$ quante sono le suddivisioni che contengono il triangolo $P_0P_kP_{n+1}$? Sono le suddivisioni del poligono $P_0P_1\cdots P_{k-1}P_k$ moltiplicate per le suddivisioni del poligono $P_kP_{k+1}\cdots P_nP_{n+1}$, cioè $C_{k-1}C_{n-k}$.

Poligoni e triangoli

Sia $P_0P_1 \cdots P_nP_{n+1}$ il poligono dato, e sia C_n il numero di suddivioni cercate. Fissato $1 \leq k \leq n$ quante sono le suddivisioni che contengono il triangolo $P_0P_kP_{n+1}$? Sono le suddivisioni del poligono $P_0P_1 \cdots P_{k-1}P_k$ moltiplicate per le suddivisioni del poligono $P_kP_{k+1} \cdots P_nP_{n+1}$, cioè $C_{k-1}C_{n-k}$. Poiché ogni suddivisione contiene un triangolo $P_0P_kP_{n+1}$ (perché P_0P_{n+1} è un lato!) per un certo k, sommando su k

Poligoni e triangoli

Sia $P_0 P_1 \cdots P_n P_{n+1}$ il poligono dato, e sia C_n il numero di suddivioni cercate. Fissato $1 \leq k \leq n$ quante sono le suddivisioni che contengono il triangolo $P_0 P_k P_{n+1}$? Sono le suddivisioni del poligono $P_0 P_1 \cdots P_{k-1} P_k$ moltiplicate per le suddivisioni del poligono $P_k P_{k+1} \cdots P_n P_{n+1}$, cioè $C_{k-1} C_{n-k}$. Poiché ogni suddivisione contiene un triangolo $P_0 P_k P_{n+1}$ (perché $P_0 P_{n+1}$ è un lato!) per un certo k, sommando su k si ottiene:

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots C_{n-1} C_0 = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}.$$

E per calcolare esplicitamente i numeri C_n?

E per calcolare esplicitamente i numeri C_n?

Sia P_0P_k una diagonale di $P_0P_1 \cdots P_nP_{n+1}$.

E per calcolare esplicitamente i numeri C_n?

Sia $P_0 P_k$ una diagonale di $P_0 P_1 \cdots P_n P_{n+1}$. Le suddivisioni che contengono questa diagonale sono $C_{k-1} C_{n-k+1}$.

E per calcolare esplicitamente i numeri C_n?

Sia P_0P_k una diagonale di $P_0P_1\cdots P_nP_{n+1}$. Le suddivisioni che contengono questa diagonale sono $C_{k-1}C_{n-k+1}$. Sommando su tutte le diagonali uscenti da un vertice: $C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}\cdots C_{n-1}C_1$.

E per calcolare esplicitamente i numeri C_n?

Sia $P_0 P_k$ una diagonale di $P_0 P_1 \cdots P_n P_{n+1}$. Le suddivisioni che contengono questa diagonale sono $C_{k-1} C_{n-k+1}$. Sommando su tutte le diagonali uscenti da un vertice: $C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} \cdots C_{n-1} C_1$. Sommando su tutti i vertici (cioè su tutte le diagonali):

$$X = \frac{n+2}{2} (C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} \cdots C_{n-1} C_1)$$

E per calcolare esplicitamente i numeri C_n?

Sia P_0P_k una diagonale di $P_0P_1 \cdots P_nP_{n+1}$. Le suddivisioni che contengono questa diagonale sono $C_{k-1}C_{n-k+1}$. Sommando su tutte le diagonali uscenti da un vertice: $C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} \cdots C_{n-1}C_1$.
Sommando su tutti i vertici (cioè su tutte le diagonali):

$$X = \frac{n+2}{2}(C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} \cdots C_{n-1}C_1)$$

Poiché ogni suddivione coinvolge $n-1$ diagonali, in X ciascuna suddivione compare $n-1$ volte,

E per calcolare esplicitamente i numeri C_n?

Sia $P_0 P_k$ una diagonale di $P_0 P_1 \cdots P_n P_{n+1}$. Le suddivisioni che contengono questa diagonale sono $C_{k-1} C_{n-k+1}$. Sommando su tutte le diagonali uscenti da un vertice: $C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} \cdots C_{n-1} C_1$. Sommando su tutti i vertici (cioè su tutte le diagonali):

$$X = \frac{n+2}{2}(C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} \cdots C_{n-1} C_1)$$

Poiché ogni suddivione coinvolge $n-1$ diagonali, in X ciascuna suddivione compare $n-1$ volte, quindi

$$X = \frac{1}{n-1} C_n$$

E per calcolare esplicitamente i numeri C_n?

Sia P_0P_k una diagonale di $P_0P_1 \cdots P_nP_{n+1}$. Le suddivisioni che contengono questa diagonale sono $C_{k-1}C_{n-k+1}$. Sommando su tutte le diagonali uscenti da un vertice: $C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} \cdots C_{n-1}C_1$. Sommando su tutti i vertici (cioè su tutte le diagonali):

$$X = \frac{n+2}{2}(C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} \cdots C_{n-1}C_1)$$

Poiché ogni suddivione coinvolge $n-1$ diagonali, in X ciascuna suddivione compare $n-1$ volte, quindi

$$X = \frac{1}{n-1}C_n$$

Da $C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} \cdots C_{n-1}C_1 + C_0C_n$, e $C_0 = 1$:

E per calcolare esplicitamente i numeri C_n?

Sia $P_0 P_k$ una diagonale di $P_0 P_1 \cdots P_n P_{n+1}$. Le suddivisioni che contengono questa diagonale sono $C_{k-1} C_{n-k+1}$. Sommando su tutte le diagonali uscenti da un vertice: $C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} \cdots C_{n-1} C_1$.
Sommando su tutti i vertici (cioè su tutte le diagonali):

$$X = \frac{n+2}{2}(C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} \cdots C_{n-1} C_1)$$

Poiché ogni suddivione coinvolge $n-1$ diagonali, in X ciascuna suddivione compare $n-1$ volte, quindi

$$X = \frac{1}{n-1} C_n$$

Da $C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} \cdots C_{n-1} C_1 + C_0 C_n$, e $C_0 = 1$:

$$C_{n+1} - 2C_n = C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1 = \frac{2(n-1)}{n+2} C_n$$

E per calcolare esplicitamente i numeri C_n?

Sia P_0P_k una diagonale di $P_0P_1 \cdots P_nP_{n+1}$. Le suddivisioni che contengono questa diagonale sono $C_{k-1}C_{n-k+1}$. Sommando su tutte le diagonali uscenti da un vertice: $C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} \cdots C_{n-1}C_1$. Sommando su tutti i vertici (cioè su tutte le diagonali):

$$X = \frac{n+2}{2}(C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} \cdots C_{n-1}C_1)$$

Poiché ogni suddivione coinvolge $n-1$ diagonali, in X ciascuna suddivione compare $n-1$ volte, quindi

$$X = \frac{1}{n-1}C_n$$

Da $C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} \cdots C_{n-1}C_1 + C_0C_n$, e $C_0 = 1$:

$$C_{n+1} - 2C_n = C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_1 = \frac{2(n-1)}{n+2}C_n$$

Quindi $C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}C_n$.

E per calcolare esplicitamente i numeri C_n?

Sia $P_0 P_k$ una diagonale di $P_0 P_1 \cdots P_n P_{n+1}$. Le suddivisioni che contengono questa diagonale sono $C_{k-1} C_{n-k+1}$. Sommando su tutte le diagonali uscenti da un vertice: $C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} \cdots C_{n-1} C_1$. Sommando su tutti i vertici (cioè su tutte le diagonali):

$$X = \frac{n+2}{2}(C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} \cdots C_{n-1} C_1)$$

Poiché ogni suddivione coinvolge $n-1$ diagonali, in X ciascuna suddivione compare $n-1$ volte, quindi

$$X = \frac{1}{n-1} C_n$$

Da $C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} \cdots C_{n-1} C_1 + C_0 C_n$, e $C_0 = 1$:

$$C_{n+1} - 2C_n = C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1 = \frac{2(n-1)}{n+2} C_n$$

Quindi $C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} C_n$. Per induzione verificare che $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Sequenze crescenti

Sia S_n il numero cercato.

Sequenze crescenti

Sia S_n il numero cercato. Il numero di sequenze con $\{+1, -1\}$ lunghe $2n$ con uguale numero di $+1$ e -1 sono $\binom{2n}{n}$.

Sequenze crescenti

Sia S_n il numero cercato. Il numero di sequenze con $\{+1, -1\}$ lunghe $2n$ con uguale numero di $+1$ e -1 sono $\binom{2n}{n}$. La somma totale dei loro termini è 0.

Sia S_n il numero cercato. Il numero di sequenze con $\{+1, -1\}$ lunghe $2n$ con uguale numero di $+1$ e -1 sono $\binom{2n}{n}$. La somma totale dei loro termini è 0. Quante sono quelle con almeno una somma parziale negativa?

Sia S_n il numero cercato. Il numero di sequenze con $\{+1, -1\}$ lunghe $2n$ con uguale numero di $+1$ e -1 sono $\binom{2n}{n}$. La somma totale dei loro termini è 0. Quante sono quelle con almeno una somma parziale negativa? Sono tante quante le sequenze lunghe $2n$ con somma totale 2

Sia S_n il numero cercato. Il numero di sequenze con $\{+1, -1\}$ lunghe $2n$ con uguale numero di $+1$ e -1 sono $\binom{2n}{n}$. La somma totale dei loro termini è 0. Quante sono quelle con almeno una somma parziale negativa? Sono tante quante le sequenze lunghe $2n$ con somma totale 2 (si prende il più piccolo k tale che la somma parziale fino a k sia -1, e si cambia il segno a tutti i termini fino a k).

Sequenze crescenti

Sia S_n il numero cercato. Il numero di sequenze con $\{+1, -1\}$ lunghe $2n$ con uguale numero di $+1$ e -1 sono $\binom{2n}{n}$. La somma totale dei loro termini è 0. Quante sono quelle con almeno una somma parziale negativa? Sono tante quante le sequenze lunghe $2n$ con somma totale 2 (si prende il più piccolo k tale che la somma parziale fino a k sia -1, e si cambia il segno a tutti i termini fino a k). Quindi devono avere $n+1$ volte il simbolo $+1$ e $n-1$ volte il simbolo -1.

Sequenze crescenti

Sia S_n il numero cercato. Il numero di sequenze con $\{+1, -1\}$ lunghe $2n$ con uguale numero di $+1$ e -1 sono $\binom{2n}{n}$. La somma totale dei loro termini è 0. Quante sono quelle con almeno una somma parziale negativa? Sono tante quante le sequenze lunghe $2n$ con somma totale 2 (si prende il più piccolo k tale che la somma parziale fino a k sia -1, e si cambia il segno a tutti i termini fino a k). Quindi devono avere $n+1$ volte il simbolo $+1$ e $n-1$ volte il simbolo -1. Quindi sono $\binom{2n}{n-1}$.

Sequenze crescenti

Sia S_n il numero cercato. Il numero di sequenze con $\{+1, -1\}$ lunghe $2n$ con uguale numero di $+1$ e -1 sono $\binom{2n}{n}$. La somma totale dei loro termini è 0. Quante sono quelle con almeno una somma parziale negativa? Sono tante quante le sequenze lunghe $2n$ con somma totale 2 (si prende il più piccolo k tale che la somma parziale fino a k sia -1, e si cambia il segno a tutti i termini fino a k). Quindi devono avere $n+1$ volte il simbolo $+1$ e $n-1$ volte il simbolo -1. Quindi sono $\binom{2n}{n-1}$. Quindi

$$S_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$$

Ancora problemi

- Si forma una coda al bottegino di un cinema, dove il biglietto d'ingresso costa 5 euro. Metà delle persone ha un biglietto da 5, l'altra metà ha un biglietto da 10. In quanti modi possono mettersi in fila queste persone per consentire al cassiere di dare il resto a tutti, iniziando senza soldi in cassa?
- Attorno a una tavola rotonda si siedono $2n$ persone. In quanti modi possono stringersi la mano a due a due senza incrociarsi?
- Quante "montagne" si possono disegnare procedendo da sinistra a destra, tracciando n tratti di lunghezza fissata verso l'alto e altrettanti verso il basso?

Ancora problemi

- In quanti modi si possono disporre delle monete a contatto tra loro sul piano, a partire da una fila iniziale lunga n, in modo che ogni moneta sia a contatto con due monete della fila inferiore?
- Si dimostri che il prodotto di k numeri interi consecutivi è divisibile per $k!$.
- Siano date n rette distinte, a due a due non parallele, e tali che tre qualsiasi di esse non si intersecano in un unico punto. In quante parti dividono il piano?