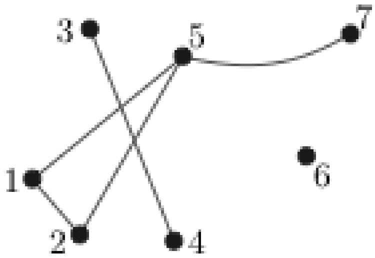
Grafi

PLS 2009

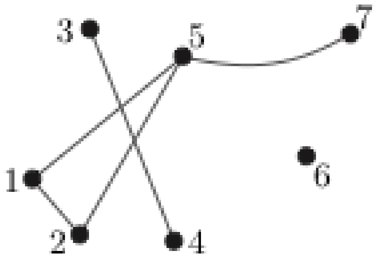
4 marzo 2009

Grafi

Un grafo è un “disegno” simile a questo

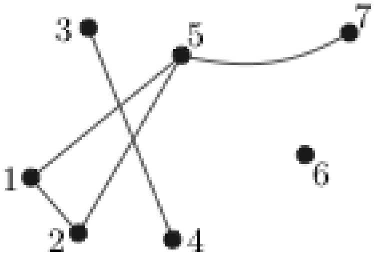


Un grafo è un "disegno" simile a questo

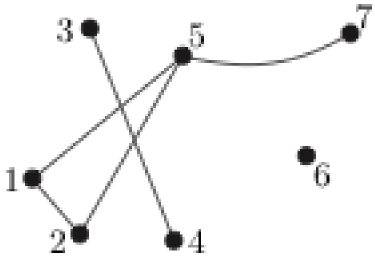


Che cosa possiamo dire di questo disegno?

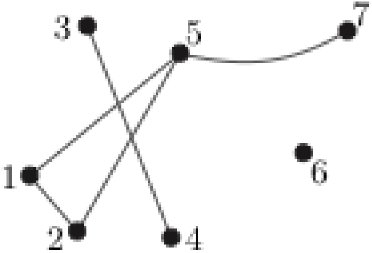
Grafi



Quali sono le caratteristiche essenziali che possiamo isolare?

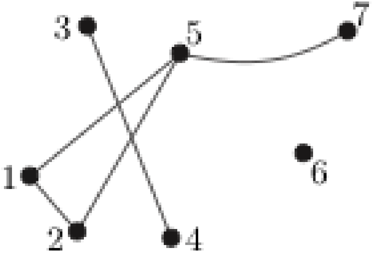


La posizione dei nodi?

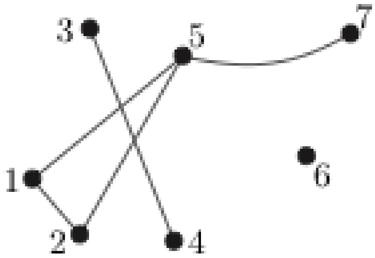


La posizione dei nodi?
La forma delle connessioni?

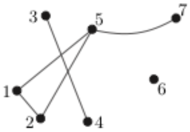
Grafi



Come possiamo ricostruire questo ‘disegno’?

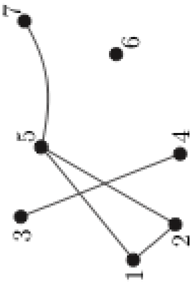


Come possiamo ricostruire questo ‘disegno’?
Ma ovviamente quello che ci interessa sono solo le caratteristiche essenziali



Se lo riduciamo di grandezza, cambia?

Grafi



Se lo ruotiamo, cambia?

Non ci interessa, in realtà, la forma "effettiva", quanto

Grafi

Non ci interessa, in realtà, la forma "effettiva", quanto le connessioni fra i *vertici*, che chiameremo *lati* del grafo

Vediamo di arrivare alla definizione 'matematica':

Vediamo di arrivare alla definizione 'matematica':

Un grafo consiste di un insieme finito V di *vertici*

Grafi

Vediamo di arrivare alla definizione 'matematica':

Un grafo consiste di un insieme finito V di *vertici*
(nel nostro caso $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$)

Vediamo di arrivare alla definizione ‘matematica’:

Un grafo consiste di un insieme finito V di *vertici*
(nel nostro caso $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$)

e di un insieme E di *lati*

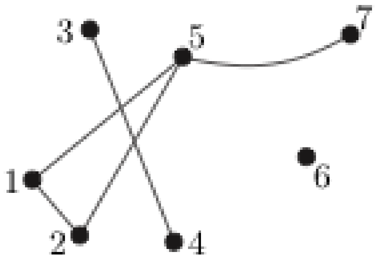
Ma come possiamo caratterizzare i lati?

Ma come possiamo caratterizzare i lati?
Quello che vogliamo è usare il minimo di ‘matematica’ per arrivare a una definizione ‘efficiente’

Ma come possiamo caratterizzare i lati?
Quello che vogliamo è usare il minimo di 'matematica' per arrivare a una definizione 'efficiente'

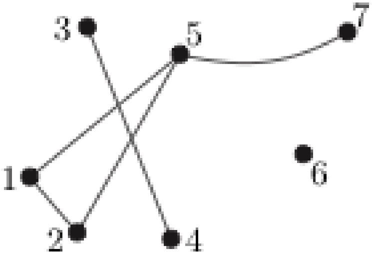
PROVARE

Grafi



$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Grafi



$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$E = \{\, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\} \,\}$

Definizioni

Se $G = (V, E)$ è un grafo, poniamo $|G| = |V|$ e $\|G\| = |E|$

Definizioni

Se $G = (V, E)$ è un grafo, poniamo $|G| = |V|$ e $\|G\| = |E|$
Il *grado* di un vertice a è il numero di lati a cui appartiene; lo indichiamo con $d(a)$

Definizioni

Se $G = (V, E)$ è un grafo, poniamo $|G| = |V|$ e $\|G\| = |E|$
Il *grado* di un vertice a è il numero di lati a cui appartiene; lo indichiamo con $d(a)$

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia un grafo, con $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$; vediamo se possiamo dire qualcosa su

$$d(a_1) + d(a_2) + \cdots + d(a_n)$$

Definizioni

Se $G = (V, E)$ è un grafo, poniamo $|G| = |V|$ e $\|G\| = |E|$
Il *grado* di un vertice a è il numero di lati a cui appartiene; lo indichiamo con $d(a)$

Supponiamo che $G = (V, E)$ sia un grafo, con $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; vediamo se possiamo dire qualcosa su

$$d(a_1) + d(a_2) + \cdots + d(a_n)$$

Ogni lato congiunge due vertici, quindi abbiamo contato due volte ciascun lato:

$$d(a_1) + d(a_2) + \cdots + d(a_n) = 2\|G\|$$

Riprendiamo l'uguaglianza

$$d(a_1) + d(a_2) + \cdots + d(a_n) = 2\|G\|$$

Un primo risultato

Riprendiamo l'uguaglianza

$$d(a_1) + d(a_2) + \cdots + d(a_n) = 2\|G\|$$

Un vertice a si dice *pari* se $d(a)$ è pari; altrimenti si dice *dispari*

Un primo risultato

Riprendiamo l'uguaglianza

$$d(a_1) + d(a_2) + \cdots + d(a_n) = 2\|G\|$$

Un vertice a si dice *pari* se $d(a)$ è pari; altrimenti si dice *dispari*

Che cosa possiamo dire del numero di vertici dispari?

Un primo risultato

Riprendiamo l'uguaglianza

$$d(a_1) + d(a_2) + \cdots + d(a_n) = 2\|G\|$$

Un vertice a si dice *pari* se $d(a)$ è pari; altrimenti si dice *dispari*

Che cosa possiamo dire del numero di vertici dispari?

Che il loro numero è pari

Un problema

Che differenza c'è fra questi due grafi?

Un problema

Che differenza c'è fra questi due grafi?

Un problema

Che differenza c'è fra questi due grafi?

La risposta è

Un problema

Che differenza c'è fra questi due grafi?

La risposta è: nessuna

Un problema

Che differenza c'è fra questi due grafi?

La risposta è: nessuna

Perché?

Un problema

Che differenza c'è fra questi due grafi?

La risposta è: nessuna

Perché?

Due grafi di questo tipo si dicono *isomorfi*

Definizioni

Due vertici a e b di un grafo (V, E) sono *adiacenti* se $\{a, b\} \in E$

Definizioni

Due vertici a e b di un grafo (V, E) sono *adiacenti* se $\{a, b\} \in E$

Un grafo è *completo* se due qualsiasi vertici sono adiacenti

Definizioni

Due vertici a e b di un grafo (V, E) sono *adiacenti* se $\{a, b\} \in E$

Un grafo è *completo* se due qualsiasi vertici sono adiacenti

I due grafi di prima, "messi assieme", formano un grafo completo con cinque vertici; quello di destra è il *complementare* dell'altro

Definizioni

Due vertici a e b di un grafo (V, E) sono *adiacenti* se $\{a, b\} \in E$

Un grafo è *completo* se due qualsiasi vertici sono adiacenti

I due grafi di prima, "messi assieme", formano un grafo completo con cinque vertici; quello di destra è il *complementare* dell'altro

Problema: quando un grafo è isomorfo al suo complementare?

Definizioni

Due vertici a e b di un grafo (V, E) sono *adiacenti* se $\{a, b\} \in E$

Un grafo è *completo* se due qualsiasi vertici sono adiacenti

I due grafi di prima, "messi assieme", formano un grafo completo con cinque vertici; quello di destra è il *complementare* dell'altro

Problema: quando un grafo è isomorfo al suo complementare?
(È difficile!)

Definizioni

Un *cammino* in un grafo è una successione

$$a_0 \ e_1 \ a_1 \ e_1 \ \ldots \ e_k \ a_k$$

dove $e_i = \{a_{i-1}, a_i\}$

Definizioni

Un *cammino* in un grafo è una successione

$$a_0 \ e_1 \ a_1 \ e_1 \ \ldots \ e_k \ a_k$$

dove $e_i = \{a_{i-1}, a_i\}$

Questo è solo un modo complicato per dire che si può andare dal vertice a_0 al vertice a_k passando per i lati del grafo

Definizioni

Un *cammino* in un grafo è una successione

$$a_0 \; e_1 \; a_1 \; e_1 \; \ldots \; e_k \; a_k$$

dove $e_i = \{a_{i-1}, a_i\}$

Questo è solo un modo complicato per dire che si può andare dal vertice a_0 al vertice a_k passando per i lati del grafo

Diremo che quello è un cammino da a_0 a a_k

Grafi connessi

Un grafo si dice *connesso* se dati due vertici qualsiasi a e b, esiste un cammino da a a b

Grafi connessi

Un grafo si dice *connesso* se dati due vertici qualsiasi a e b, esiste un cammino da a a b

Se $a = b$ esiste un cammino da a a a?

Grafi connessi

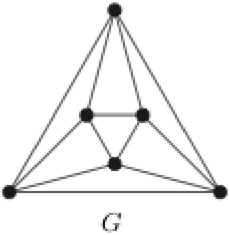
Un grafo si dice *connesso* se dati due vertici qualsiasi a e b, esiste un cammino da a a b

Se $a = b$ esiste un cammino da a a a?

Parleremo d'ora in poi solo di grafi connessi

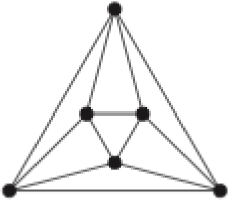
Alberi

Trovare una differenza fra i due grafi



Alberi

Trovare una differenza fra i due grafi



G

In quello di sinistra, esistono cammini *chiusi*, in quello di destra no

Alberi

Un grafo ha un cammino chiuso se esistono due vertici distinti a e b e due cammini *distinti* da a a b

Alberi

Un grafo ha un cammino chiuso se esistono due vertici distinti a e b e due cammini *distinti* da a a b

Un *albero* è un grafo connesso in cui non ci sono cammini chiusi

Alberi

Un grafo ha un cammino chiuso se esistono due vertici distinti a e b e due cammini *distinti* da a a b

Un *albero* è un grafo connesso in cui non ci sono cammini chiusi

Quindi in un albero si può andare da un vertice a un altro in un solo modo

Disegnare alberi

Se a e b sono vertici di un albero, possiamo definire la *distanza* tra a e b come la lunghezza dell'unico cammino da a a b

Disegnare alberi

Se a e b sono vertici di un albero, possiamo definire la *distanza* tra a e b come la lunghezza dell'unico cammino da a a b

Segniamo il vertice a scelto come ci pare

Disegnare alberi

Se a e b sono vertici di un albero, possiamo definire la *distanza* tra a e b come la lunghezza dell'unico cammino da a a b

Segniamo il vertice a scelto come ci pare
Sopra di esso segniamo i vertici che hanno distanza 1 da a

Disegnare alberi

Se a e b sono vertici di un albero, possiamo definire la *distanza* tra a e b come la lunghezza dell'unico cammino da a a b

Segniamo il vertice a scelto come ci pare
Sopra di esso segniamo i vertici che hanno distanza 1 da a
Sopra ancora i vertici che hanno distanza 2 da a

Disegnare alberi

Se a e b sono vertici di un albero, possiamo definire la *distanza* tra a e b come la lunghezza dell'unico cammino da a a b

Segniamo il vertice a scelto come ci pare
Sopra di esso segniamo i vertici che hanno distanza 1 da a
Sopra ancora i vertici che hanno distanza 2 da a

...

Teorema

In ogni albero con almeno due vertici esiste almeno un vertice di grado 1

Teorema

In ogni albero con almeno due vertici esiste almeno un vertice di grado 1

Dimostriamolo. Siccome ci sono almeno due vertici e il grafo è connesso, c'è almeno un lato $\{a_1, a_2\}$

Teorema

In ogni albero con almeno due vertici esiste almeno un vertice di grado 1

Dimostriamolo. Siccome ci sono almeno due vertici e il grafo è connesso, c'è almeno un lato $\{a_1, a_2\}$
Supponiamo *per assurdo* che nessun vertice abbia grado 1

Teorema

In ogni albero con almeno due vertici esiste almeno un vertice di grado 1

Dimostriamolo. Siccome ci sono almeno due vertici e il grafo è connesso, c'è almeno un lato $\{a_1, a_2\}$
Supponiamo *per assurdo* che nessun vertice abbia grado 1
Allora esiste almeno un lato $\{a_2, a_3\}$ e ancora almeno un lato $\{a_3, a_4\}$

Teorema

In ogni albero con almeno due vertici esiste almeno un vertice di grado 1

Dimostriamolo. Siccome ci sono almeno due vertici e il grafo è connesso, c'è almeno un lato $\{a_1, a_2\}$
Supponiamo *per assurdo* che nessun vertice abbia grado 1
Allora esiste almeno un lato $\{a_2, a_3\}$ e ancora almeno un lato $\{a_3, a_4\}$
Dobbiamo sempre trovare nuovi vertici, perché altrimenti avremmo un cammino chiuso!

Teorema

In ogni albero con almeno due vertici esiste almeno un vertice di grado 1

Dimostriamolo. Siccome ci sono almeno due vertici e il grafo è connesso, c'è almeno un lato $\{a_1, a_2\}$
Supponiamo *per assurdo* che nessun vertice abbia grado 1
Allora esiste almeno un lato $\{a_2, a_3\}$ e ancora almeno un lato $\{a_3, a_4\}$
Dobbiamo sempre trovare nuovi vertici, perché altrimenti avremmo un cammino chiuso!
Ma l'insieme dei vertici è finito! Assurdo.

Alberi

Teorema

Se un albero ha n vertici, allora ha $n-1$ lati

Alberi

Teorema

Se un albero ha n vertici, allora ha $n-1$ lati

La dimostrazione è per induzione

Teorema

Se un albero ha n vertici, allora ha $n-1$ lati

La dimostrazione è per induzione

Se $n=1$ non ci sono lati e il numero di lati è $0=n-1$

Teorema

Se un albero ha n vertici, allora ha $n - 1$ lati

La dimostrazione è per induzione

Se $n = 1$ non ci sono lati e il numero di lati è $0 = n - 1$

Se $n > 1$ prendiamo un vertice a di grado 1, che esiste per il teorema di prima

Alberi

Teorema

Se un albero ha n vertici, allora ha $n - 1$ lati

La dimostrazione è per induzione

Se $n = 1$ non ci sono lati e il numero di lati è $0 = n - 1$

Se $n > 1$ prendiamo un vertice a di grado 1, che esiste per il teorema di prima

Consideriamo il grafo che si ottiene cancellando quel vertice e l'unico lato a cui appartiene

Teorema

Se un albero ha n vertici, allora ha $n-1$ lati

La dimostrazione è per induzione

Se $n=1$ non ci sono lati e il numero di lati è $0=n-1$

Se $n>1$ prendiamo un vertice a di grado 1, che esiste per il teorema di prima

Consideriamo il grafo che si ottiene cancellando quel vertice e l'unico lato a cui appartiene

Questo nuovo grafo è ancora un albero! Ma ha $n-1$ vertici e quindi, per ipotesi induttiva, $n-2$ lati

Teorema

Se un albero ha n vertici, allora ha $n-1$ lati

La dimostrazione è per induzione

Se $n = 1$ non ci sono lati e il numero di lati è $0 = n - 1$

Se $n > 1$ prendiamo un vertice a di grado 1, che esiste per il teorema di prima

Consideriamo il grafo che si ottiene cancellando quel vertice e l'unico lato a cui appartiene

Questo nuovo grafo è ancora un albero! Ma ha $n-1$ vertici e quindi, per ipotesi induttiva, $n-2$ lati

Quindi il grafo originale ha $(n-2)+1 = n-1$ lati!

Teorema

Se un albero ha n vertici, allora ha $n-1$ lati

La dimostrazione è per induzione

Se $n = 1$ non ci sono lati e il numero di lati è $0 = n - 1$

Se $n > 1$ prendiamo un vertice a di grado 1, che esiste per il teorema di prima

Consideriamo il grafo che si ottiene cancellando quel vertice e l'unico lato a cui appartiene

Questo nuovo grafo è ancora un albero! Ma ha $n-1$ vertici e quindi, per ipotesi induttiva, $n-2$ lati

Quindi il grafo originale ha $(n-2)+1 = n-1$ lati! Hurray!

Induzione

Non si prenda paura di questa misteriosa parola: “induzione”.

Induzione

Non si prenda paura di questa misteriosa parola: "induzione".

È solo una tecnica di dimostrazione che consiste nel ridurre il numero di oggetti da esaminare.

Induzione

Non si prenda paura di questa misteriosa parola: “induzione”.

È solo una tecnica di dimostrazione che consiste nel ridurre il numero di oggetti da esaminare.

Nel nostro caso l’albero ha n vertici; togliendone uno di grado 1 e l’unico lato a cui appartiene, il grafo che resta ha $n-1$ vertici.

Induzione

Non si prenda paura di questa misteriosa parola: “induzione”.

È solo una tecnica di dimostrazione che consiste nel ridurre il numero di oggetti da esaminare.

Nel nostro caso l’albero ha n vertici; togliendone uno di grado 1 e l’unico lato a cui appartiene, il grafo che resta ha $n-1$ vertici.

Ma è ancora un albero! I cammini su questo grafo sono anche cammini sul grafo originale!

Induzione

Non si prenda paura di questa misteriosa parola: “induzione”.

È solo una tecnica di dimostrazione che consiste nel ridurre il numero di oggetti da esaminare.

Nel nostro caso l’albero ha n vertici; togliendone uno di grado 1 e l’unico lato a cui appartiene, il grafo che resta ha $n-1$ vertici.

Ma è ancora un albero! I cammini su questo grafo sono anche cammini sul grafo originale!

Quindi anche questo nuovo grafo ha un vertice di grado 1 e possiamo ripetere la procedura

Induzione

Non si prenda paura di questa misteriosa parola: "induzione".

È solo una tecnica di dimostrazione che consiste nel ridurre il numero di oggetti da esaminare.

Nel nostro caso l'albero ha n vertici; togliendone uno di grado 1 e l'unico lato a cui appartiene, il grafo che resta ha $n - 1$ vertici.

Ma è ancora un albero! I cammini su questo grafo sono anche cammini sul grafo originale!

Quindi anche questo nuovo grafo ha un vertice di grado 1 e possiamo ripetere la procedura

Alla fine ci troveremo a eliminare tutto tranne un vertice! Quanti vertici abbiamo eliminato?

Induzione

Non si prenda paura di questa misteriosa parola: "induzione".

È solo una tecnica di dimostrazione che consiste nel ridurre il numero di oggetti da esaminare.

Nel nostro caso l'albero ha n vertici; togliendone uno di grado 1 e l'unico lato a cui appartiene, il grafo che resta ha $n-1$ vertici.

Ma è ancora un albero! I cammini su questo grafo sono anche cammini sul grafo originale!

Quindi anche questo nuovo grafo ha un vertice di grado 1 e possiamo ripetere la procedura

Alla fine ci troveremo a eliminare tutto tranne un vertice! Quanti vertici abbiamo eliminato? Esattamente $n-1$, e altrettanti lati!