LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

PERCHE’ SONO IMPORTANTI…

Sul piano storico epistemologico. Cambiano completamente il modo di vedere la geometria e la matematica in genere specialmente nei suoi rapporti col mondo fisico

Sul piano logico Viene sostituito il concetto di verità con quello di non cottraddittorietà e coerenza

Sul piano culturale. Lo studio della geometria non euclidea ha l'effetto di chiarire che la geometria non è una teoria nata e morta nella Grecia classica ma che ha avuto un suo processo di sviluppo fino ad oggi

Sul piano didattico Offrono all’insegnante alcuni notevoli vantaggi:

L'ambiente della geometria non euclidea, essendo meno familiare e meno intuitivo, costringe gli studenti a potenziare il ragionamento logico e il rigore dimostrativo. Dal momento che si studia geometria non euclidea attraverso modelli euclidei lo studente è costretto ad approfondire tematiche di geometria euclidea di cui altrimenti non sentirebbe il bisogno

EUCLIDE

Vive ad Alessandria d’Egitto intorno al 300 a.C durante il regno di Tolomeo.

Studia ad Atene alla Scuola di Platone

Alcuni aneddoti , riferiti da Proco , ci danno la possibilità di comprendere il carattere di Euclide. Nel primo , ci è detto che il re Tolomeo chiese a Euclide se non ci fosse un mezzo più breve degli Elementi per imparare la geometria, e che Euclide gli rispose che non esistono vie regie in geometria.Nel secondo aneddoto si narra che un discepolo , dopo aver imparato alcuni dei primi teoremi , chiese ad Euclide: Maestro, quale utile ricaverò imparando queste cose ? Ed Euclide chiamò un servo e gli diede ordine di dare qualche moneta al malcapitato, visto che voleva trarre guadagno da ciò che studiava , e di mandarlo via.Dal primo aneddoto si deduce l’estremo rigore di Euclide , tanto da non fare concessioni didattiche , neanche al re.Il secondo aneddoto allude al carattere strettamente teorico degli Elementi

Gli Elementi

13 Libri:

1-4 proprietà fondamentali delle figure rettilinee e dei cerchi

5 Teoria delle proporzioni (Eudosso)

6 Teoria delle figure simili

7-9 Teoria dei numeri

10 Classificazione degli incommensurabili

11- 13 la geometria solida ed il metodo di esaustione

Gli Elementi

- All'inizio dell'opera <u>postulati</u> e <u>nozioni comuni</u>
- All'inizio di *ogni* libro <u>definizioni</u>
- <u>Proposizioni</u> in ordine di difficoltà.

PRE - CONCETTI FONDAMENTALI

- L'esistenza non e' mai messa in dubbio in quanto gli enti geometrici sono idee a priori
- Esistenza degli enti geometrici=costruibilità mediante linee e cerchi (riga e compasso)

Gli Elementi: definizioni

I. Punto è ciò che non ha parti.
II. Linea è lunghezza senza larghezza.
III. Estremi di una linea sono punti.
IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa (cioè, ai suoi punti).
V. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
VI. Estremi di una superficie sono linee.
VII. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette di essa
…..

XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano da nessuna delle due parti

Gli Elementi: i postulati

n
e
u
t
r
a
l
e

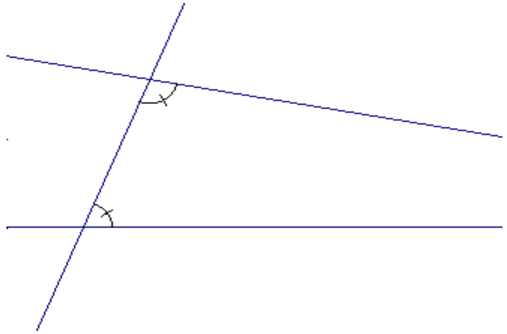
I   Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.

II   E che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta.

III.   E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza.

IV.   E che tutti gli angoli retti siano eguali fra loro.

V.   E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.



Gli Elementi: il V postulato

Il primo a mettere in dubbio il V postulato fu Euclide stesso. Infatti:

- La formulazione a differenza degli altri quattro è quella di un teorema: *se… allora*
- Cerca di non utilizzarlo (solo alla prop. 29 del I libro)
- L'inverso di questo postulato è un teorema (prop. 17 I libro) "*In ogni triangolo la somma di qualsiasi due angoli è minore di due retti*"

Si presume che abbia cercato di dimostrarlo senza successo

Il V postulato

Da Euclide fino al XIX secolo D.C. tutti i matematici che si occuparono di Geometria **non mettendo mai in discussione la verità del V postulato**, tentarono di fugare ogni dubbio intorno a tale postulato con due approcci:

- Sostituendolo con un enunciato più evidente (almeno in apparenza)
- Dimostrandolo a partire dalla geometria neutrale (commettendo errori logici o assumendo implicitamente proprietà che di per loro implicano il V postulato)

Il V postulato

Sia P un postulato sostitutivo allora P è equivalente al V postulato se valgono entrambe le condizioni:

a) GEOMETRIA NEUTRALE + P → V POSTULATO

b) GEOMETRIA NEUTRALE + V P. → P

L'equivalenza logica di tutti i postulati sostitutivi risulta evidente se pensiamo che chiunque proponga un postulato sostitutivo A lo usa per dimostrare il V postulato , dunque si verifica a).
Allo stesso tempo A sarà senz'altro qualcosa di dimostrabile nell'ambito della geometria euclidea, e quindi si verifica b).

Il V postulato

Rette parallele sono equidistanti *Posidonio I sec d.C*.

La distanza fra due rette infinite parallele può variare, ma rimane sempre minore di una certa distanza fissata *Proclo V sec. D.C*.

Per un punto non giacente su una retta data né sul suo prolungamento, non è possibile tracciare più di una parallela alla retta data. *Playfair XVIII sec. D.C.*

Su una retta finita data è sempre possibile costruire un triangolo simile a un triangolo dato *Wallis*.

La somma degli angoli interni di ogni triangolo è un angolo piatto.

In ogni quadrilatero con tre angoli retti, anche il quarto angolo è retto.

Esiste una coppia di triangoli simili e non congruenti

E' possibile costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualunque area data

I precursori della geometria non euclidea

- Sono l'italiano Girolamo Saccheri, gesuita di San Remo, lo svizzero Lambert ed il francese Legendre. A differenza dei loro predecessori, più votati ad una sostituzione del quinto postulato con una formulazione più chiara e ad esso equivalente, essi ne cercano una dimostrazione.
- La novità sta nel fatto che si spingono molto oltre, formulando nel loro percorso dei risultati non euclidei senza far ricorso implicitamente o esplicitamente ad assiomi implicanti od equivalenti al V postulato.
- Solamente le conseguenze dei loro ragionamenti ancora troppo lontane dal loro modo di pensare la geometria, producono un "dietro front" circa le conclusioni che si sarebbero potute trarre.

Girolamo Saccheri

Gesuita docente di matematica presso l'Università di Pavia (1667-1733) nella sua opera dal titolo EUCLIDES AB OMNI NAEVO VINDICATUS credette di aver dimostrato il postulato delle parallele mediante un ragionamento per assurdo, negando cioè il postulato stesso e cercando di giungere ad un'antinomia

Saccheri era convinto di due cose:

1. *che l'enunciato fosse vero*
2. *che esso potesse essere dedotto dai precedenti e, quindi, diventare teorema*

Girolamo Saccheri

Il suo modo di ragionare fu il seguente:

- supporre vera la negazione del postulato delle parallele
- dedurre dal nuovo sistema di assiomi (i primi quattro più la negazione del quinto) tutta una serie di teoremi loro conseguenza
- pervenire ad un assurdo

Girolamo Saccheri

Mediante le 28 proposizioni del I libro di Euclide, dimostra che:

TEOREMA 1 : Gli angoli ai vertici superiori C D del quadrilatero (che possiamo anche chiamare di Saccheri) sono uguali

TEOREMA 2: La retta che congiunge i punti medi di AB e di CD è perpendicolare sia ad AB che a CD.

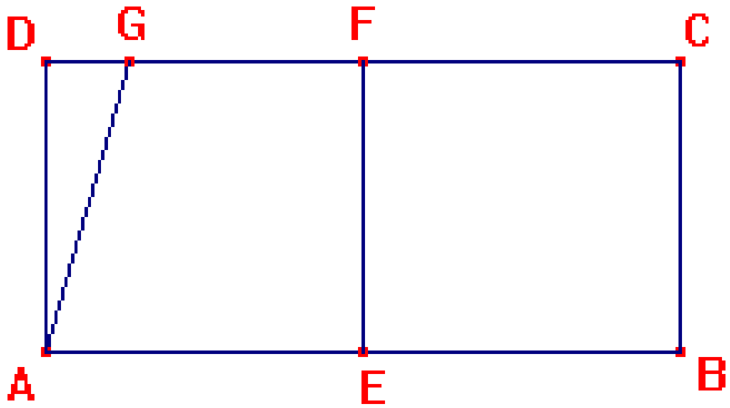
A questo egli formula tre ipotesi possibili:

- ipotesi angolo retto (HAR) gli angoli C e D sono retti
- ipotesi angoli acuto (HAA) gli angoli C e D sono acuti
- ipotesi dell’angolo ottuso (HAO) gli angoli C e D sono ottusi

Girolamo Saccheri

TEOREMA 3: Nel quadrilatero ABCD abbiamo che:

- AB = CD se HAR
- AB< CD se HAA
- AB > CD se HAO



Girolamo Saccheri

TEOREMA 9: In un triangolo ABC abbiamo che:

somma degli angoli interni = due retti se HAR

somma degli angoli interni < due retti se HAA

somma degli angoli interni > due retti se HAO

TEOREMA 11: In HAO se la retta BC è perpendicolare alla retta AB e la retta AD forma con la retta AB l'angolo DAB acuto, allora la retta AD e la retta BC si intersecano.

TEOREMA 13: In HAO se due rette tagliate da una trasversale formano due angoli interni che hanno somma minore di un angolo piatto allora s'inetrsecano.

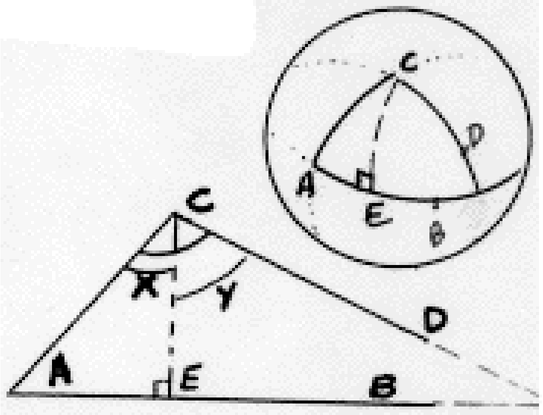


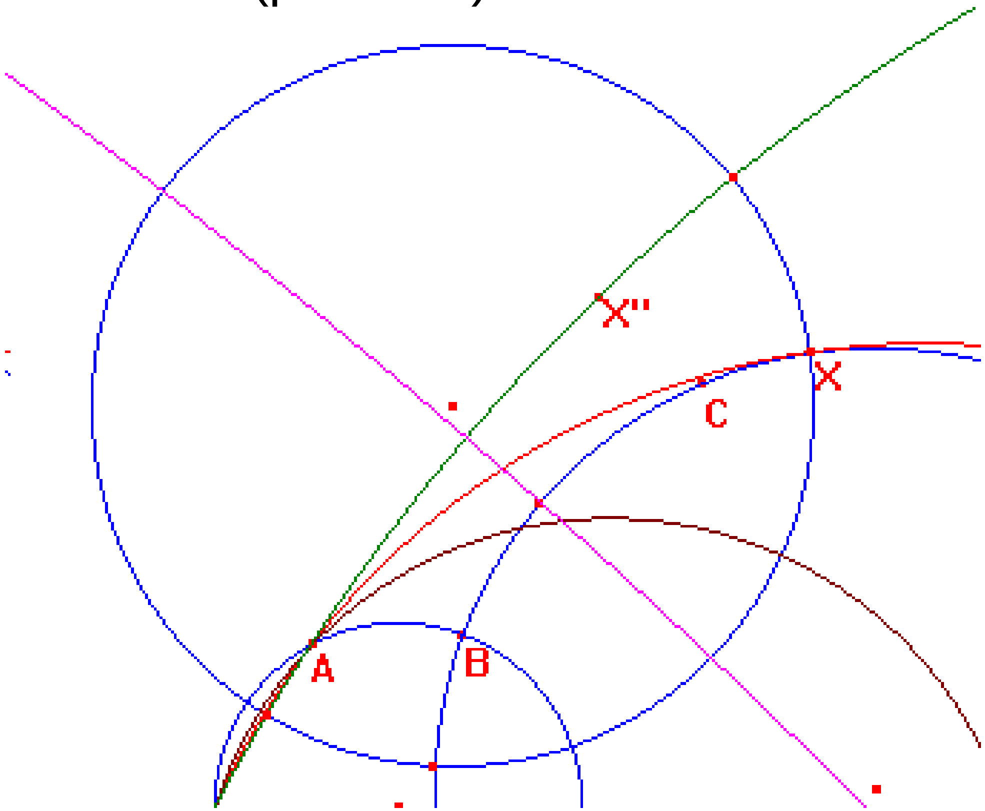
Figure #9 $\angle A + \angle ACD = \pi$

Contraddizione

Girolamo Saccheri

In HAA due rette possono:

- ✓Essere secanti
- ✓Avere una perpendicolare comune (parallele)
- ✓Essere asintotiche



Girolamo Saccheri

Saccheri dedusse che le rette che lui chiama asintotiche AX e BC dovrebbero avere nel loro punto d’incontro all’infinito una **perpendicolare comune**.

Tale conclusione non è contraddizione con alcun teorema od assioma precedentemente citato, ma egli la trovò “***così ripugnate e lontana dalla natura della retta***” che si sentì in diritto di dire che **l’ipotesi dell’angolo acuto doveva esser falsa**

Gauss

Geometria astrale

Nel 1799 scrive a Bolyai W.

“…Tuttavia, il cammino che ho scelto non conduce affatto alla meta che cerchiamo [la deduzione dell’assioma delle parallele] e che tu mi assicuri di aver raggiunto. Essa sembra piuttosto obbligarmi a dubitare della verità della stessa geometria. È vero che sono giunto a qualche cosa che la maggior parte delle persone riterrebbe che costituisca una dimostrazione, ma ai miei occhi non prova un bel nulla. Ad esempio, se potessimo dimostrare la possibilità dell’esistenza di un triangolo rettilineo la cui area sia maggiore di ogni area data, allora sarei pronto a provare tutta la geometria [euclidea] in maniera assolutamente rigorosa.
La maggior parte delle persone accetterebbero certamente questo fatto come assioma, ma io no! Potrebbe in effetti essere possibile che l’area rimanga sempre al di sotto di un certo limite, per quanto distanti siano presi i tre vertici di un triangolo”

Gauss

In un’ulteriore lettera a Olbers scritta nel 1817

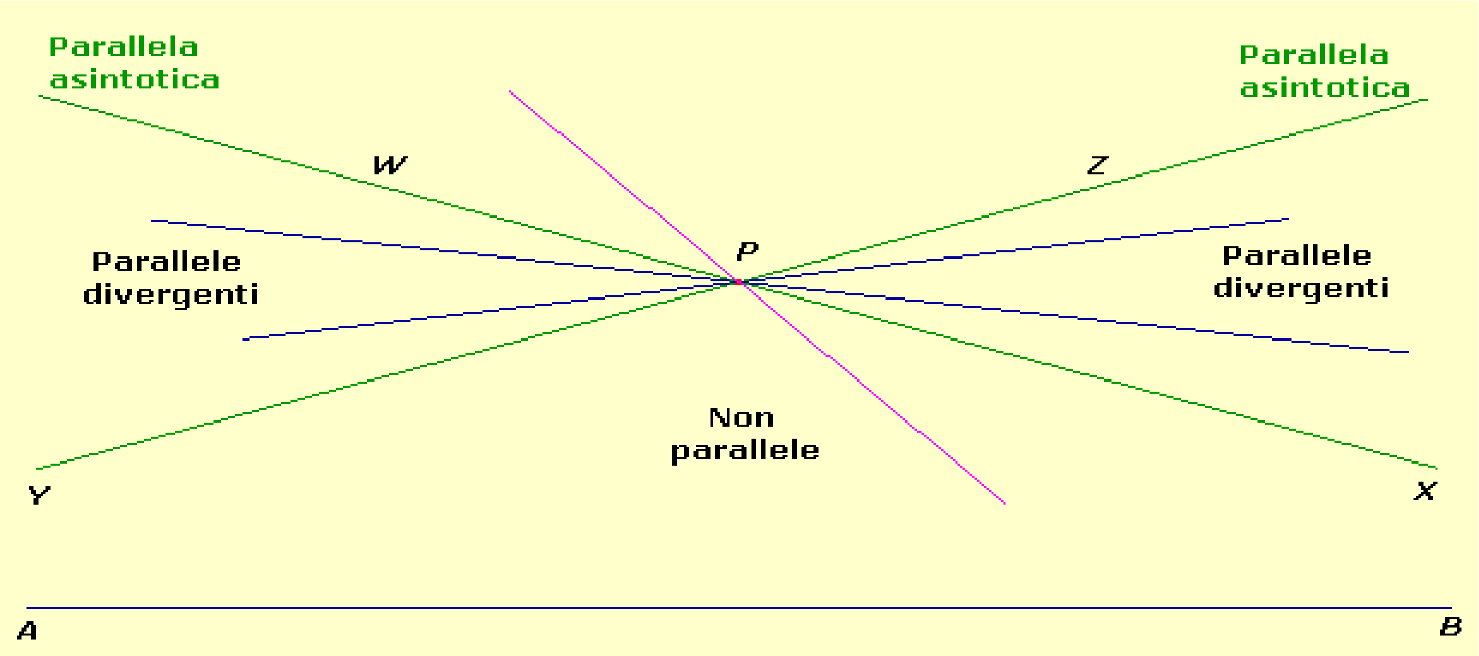
“*Mi sto convincendo sempre di più che la necessità fisica della nostra geometria [euclidea] non può essere dimostrata, almeno non dalla ragione umana né per ragioni umane. Forse in un’altra vita penetreremo la natura dello spazio, che per ora è irraggiungibile. Fino ad allora dovremo porre la geometria non nella stessa classe dell’aritmetica, che è puramente a priori, ma in quella della meccanica”*

Scriveva a Schumacher il 17 maggio del 1831:

Da qualche settimana ho cominciato a metter per iscritto qualche risultato delle mie meditazioni su questo soggetto, che risalgono in parte a quarant'anni, e di cui non avevo mai nulla redatto; cosa che mi ha costretto tre o quattro volte a ricominciare tutto il lavoro nella mia testa. Non vorrei pertanto che tutto ciò perisse con me.

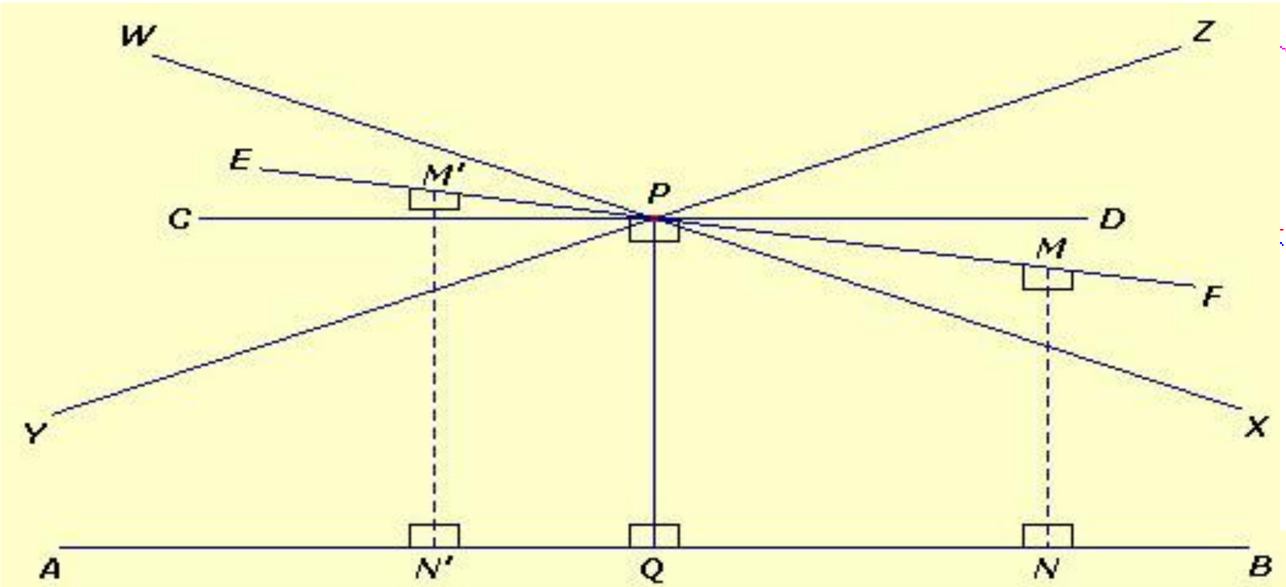
Lobatchevsky

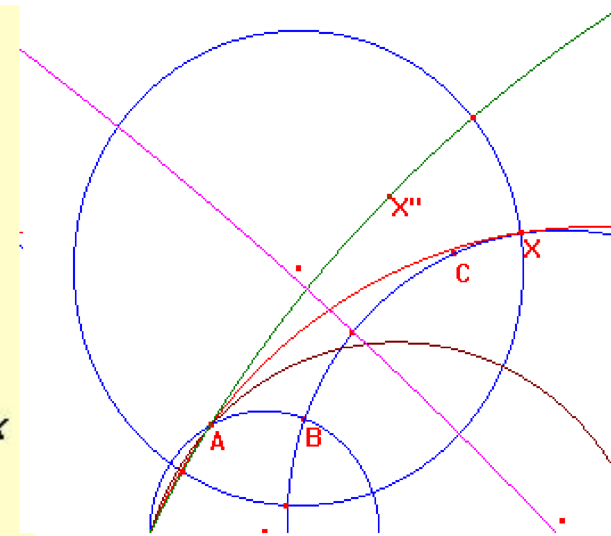
1837: Nuovi fondamenti della geometria con una teoria completa delle parallele.



Se P è un punto qualunque e AB una retta qualunque che non passa per P (nemmeno se prolungata), allora vi sono due rette YPZ e WPX passanti per P tali che:
i) YPX non è un'unica retta,
ii) YPZ e WPX sono entrambe parallele ad AB,
iii) nessuna retta passante per P interna a ^YPX è parallela ad AB.

Parallele divergenti

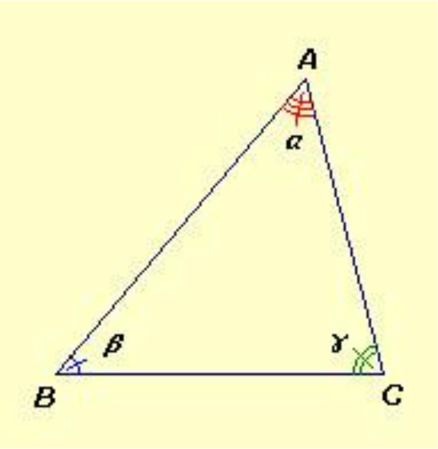




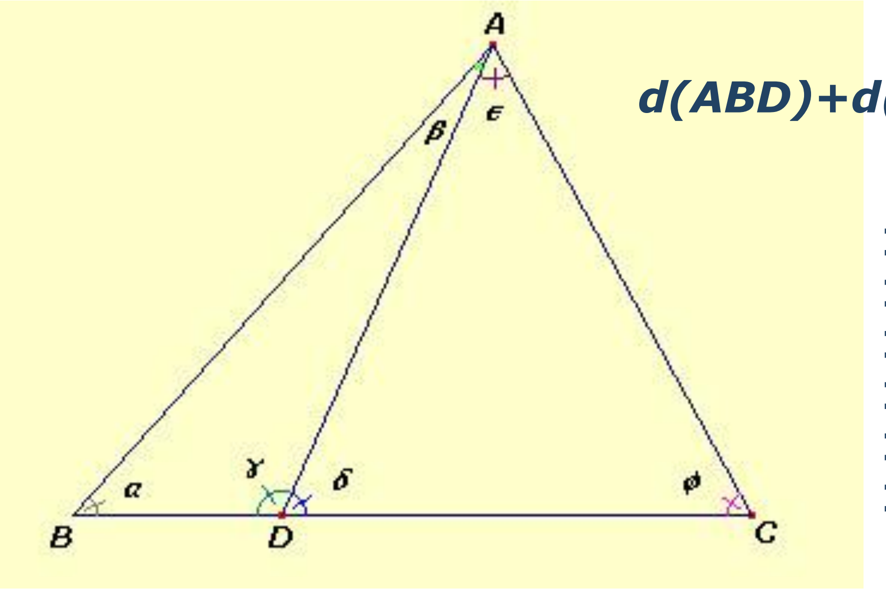
Due parallele divergenti si allontanano l'una dall'altra da parti opposte rispetto alla perpendicolare comune.

In altre parole, due parallele "divergenti" divergono. Questo teorema afferma che la perpendicolare comune rappresenta la distanza di massimo avvicinamento di due parallele divergenti, e, scelto un punto su una delle due rette, più questo è distante dalla perpendicolare comune, maggiore è la lunghezza della perpendicolare condotta da questo punto all'altra retta.

Difetto angolare



Il difetto del triangolo *ABC* sarà *d* = 180°–α–β–γ



$$d(ABD)+d(ADC) = (180°-\alpha-\beta-\gamma) + (180°-\delta-\varepsilon-\phi) =$$

$$180°-\alpha-\beta-\gamma + 180°-\delta-\varepsilon-\phi =$$
$$180°-\alpha-\beta- (\gamma + \delta) + 180°-\varepsilon-\phi=$$
$$180°-\alpha-\beta- 180° + 180°-\varepsilon-\phi =$$
$$180°-\alpha-\beta-\varepsilon-\phi =$$
$$180°-\alpha- (\beta+\varepsilon) -\phi =$$
$$180°-\alpha - \hat{}BAC -\phi = d(ABC)$$

Limitazioni superiore dell'area

Area(ABC) : difetto(ABC) = Area(DEF) : difetto(DEF)

Supponiamo ora che *ABC* sia un triangolo generico di cui vogliamo trovare l'area e *DEF* un triangolo particolare; sia poi *k* il valore del rapporto *Area(DEF) / difetto(DEF)*

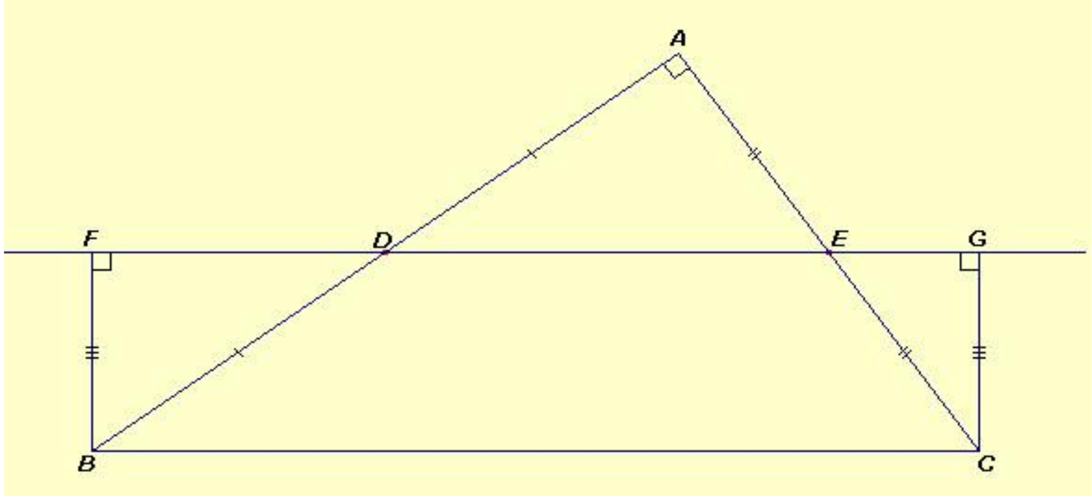
Area(ABC) / difetto(ABC) = k,

che possiamo scrivere come

Area(ABC) = k difetto(ABC)

***Area(ABC) = k difetto(ABC) < k* 180°**

Teorema di Pitagora



Se per assurdo il teorema di Pitagora fosse valido, potremmo applicarlo ai triangoli rettangoli *ABC* e *ADE*, ottenendo le relazioni:

$$BC^2=AB^2+AC^2 \quad [1]$$

$$DE^2=AD^2+AE^2 \quad [2]$$

Poiché $AD=1/2\ AB$ e $AE=1/2\ AC$, possiamo riscrivere l'equazione [2] come

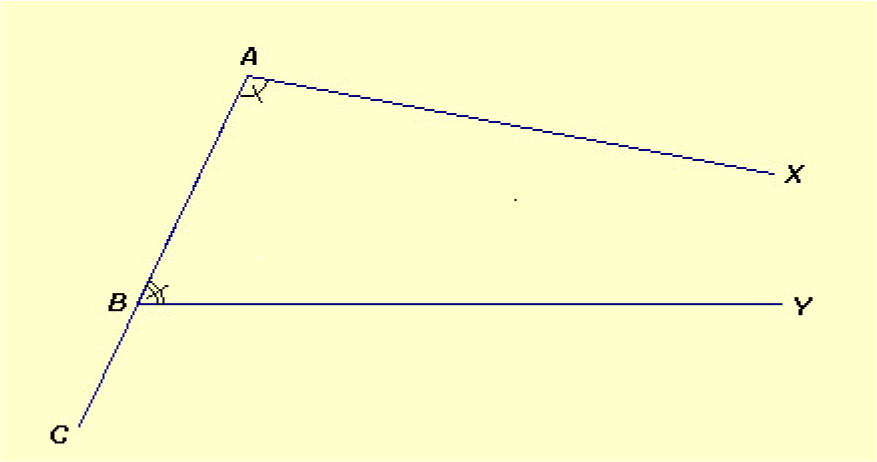
$$DE^2=(1/2\ AB)^2+(1/2\ AC)^2 =1/4\ AB^2+1/4\ AC^2=1/4\ (AB^2+AC^2).$$

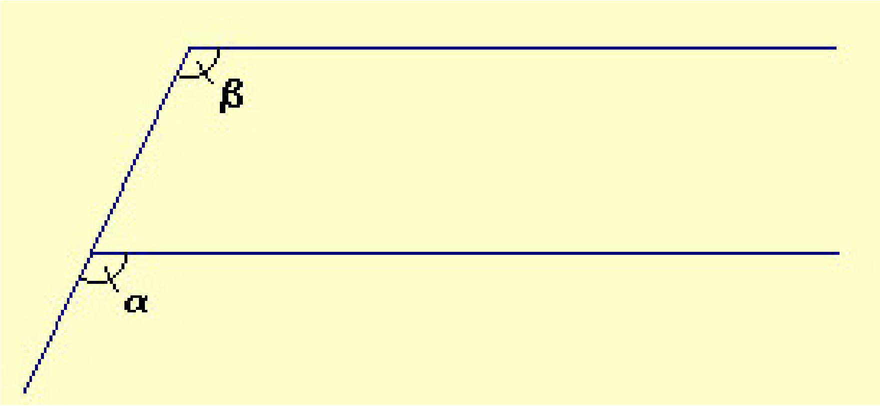
Per l'equazione [1], $1/4\ (AB^2+AC^2) = 1/4\ BC^2$, quindi

$$DE^2=1/4\ BC^2 \text{ ovvero } DE=1/2\ BC.$$

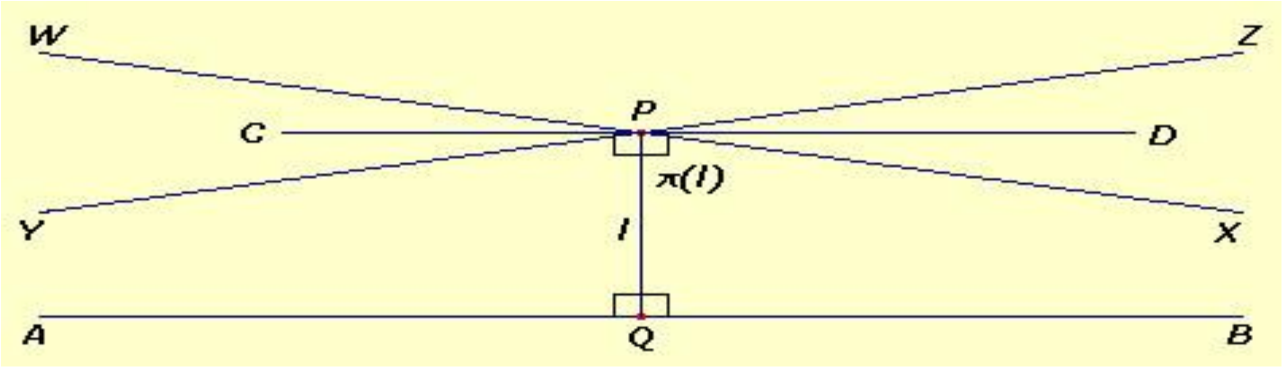
Ma $DE=1/2\ FG$, quindi otteniamo che la sommità *BC* è uguale alla base *FG*. Questa è una contraddizione

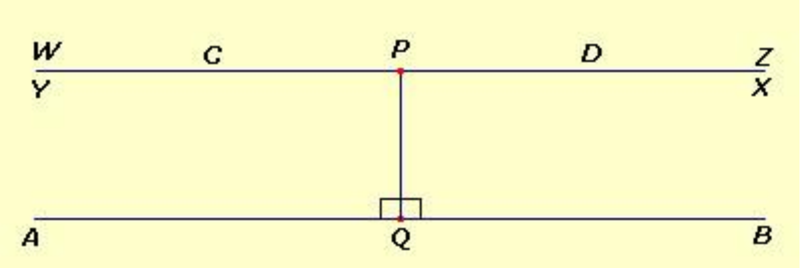
Biangolo

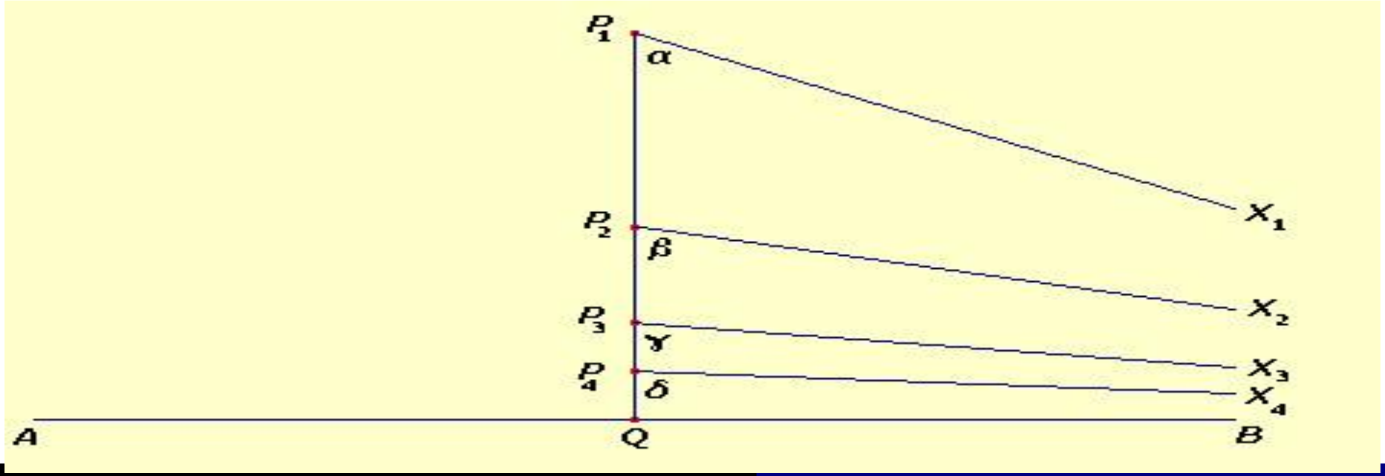




Angolo di parallellismo







Angolo di parallellismo

$$tg\,\frac{\pi(a)}{2} = e^{-a} \Rightarrow \pi(a) = 2arctg\ e^{-a}$$

$$\lim_{a\to 0} 2arctg\ e^{-a} = \pi/2 \qquad \lim_{a\to\infty} 2arctg\ e^{-a} = 0$$

Alcune proprietà metriche

$$ds = \sqrt{(dy)^2 + \frac{(dx)^2}{\sin^2 \pi(x)}}$$

$$C = \pi(e^r - e^{-r})$$

$$A = \pi(e^{r/2} - e^{-r/2})^2$$

Per **r piccolo** a meno di infinitesimi del **secondo** ordine

$$C = \pi(e^r - e^{-r}) = \pi(1 + r - (1 - r)) = 2\pi r$$

$$A = \pi(e^{r/2} - e^{-r/2})^2 = \pi(1 + \frac{r}{2} - (1 - \frac{r}{2}))^2 = \pi r^2$$

Ipse dixit…

…a prescindere dal fatto che nella nostra immaginazione lo spazio può essere ampliato senza limiti, la natura stessa ci indica distanze tali, in paragone alle quali svaniscono per la loro piccolezza perfino le distanze delle stelle fisse dalla nostra Terra. Dopo di che non si può più garantire che la proposizione che la misura dei segmenti non dipenda dagli angoli [dalla quale discenderebbe l'intera geometria euclidea] (proposizione che molti geometri vorrebbero assumere come verità rigorosa, non necessitante dimostrazione) non possa mostrarsi sensibilmente falsa anche prima di andare al di là del mondo a noi visibile."

Felix Klein (metà '800)

Data una retta per un punto esterno ad essa passa…

Un'unica retta parallela a quella data

GEOMETRIA EUCLIDEA

Infinite rette parallele a quella data

GEOMETRIA IPERBOLICA

Nessuna retta parallela a quella data

GEOMETRIA ELLITTICA

GEOMETRIA SFERICA

Riemann

E' noto che la geometria presuppone, come qualcosa di dato, sia il concetto di spazio, sia i primi concetti fondamentali per le costruzioni nello spazio. Di essi dà soltanto definizioni nominali, mentre le determinazioni essenziali compaiono sotto forma di assiomi.

L'approccio di Riemann allo studio dei fondamenti della geometria non seguiva il metodo tradizionale dello studio degli assiomi e delle definizioni. Sviluppando in modo ardito le idee di Gauss sulla geometria differenziale delle superfici, egli affermava che lo spazio andava studiato non tanto nella sua globalità quanto nel suo comportamento locale e quindi nella sua struttura infinitesima, e metteva a fondamento della geometria una nuova nozione: quella di varietà;

La geometria trova un suo fondamento nell’analisi: è impossibile indagare la realtà fisica attraverso misurazioni di tipo empirico

Riemann

ILLIMITATEZZA | **INFINITEZZA**

ESTENSIONE
QUALITATIVO

METRICO
QUANTITATIVO

Curvatura e Geodetica

- Per C=0 abbiamo le proprietà geometriche nel piano derivate dall'ipotesi dell'angolo retto (geometria euclidea)
- Per C>0 abbiamo le proprietà geometriche del piano derivate dall'ipotesi dell'angolo ottuso (geometria ellittica)
- Per C<0 abbiamo le proprietà geometriche del piano derivate dall'ipotesi dell'angolo acuto (geometria immaginaria-iperbolica)

Riemann

Superficie	**Regione di piano**
Punto	**Punto**
Geodetica	**Retta**
Arco di geodetica	**Segmento**
Proprietà lineari della geodetica	**Postulati relativi all'ordinamento su di una retta**
Due punti determinano una geodetica	**Due punti determinano una retta**
Proprietà fondamentali dell'uguaglianza di archi geodetici e di angoli	**Postulati della congruenza tra segmenti ed angoli**
Se due triangoli geodetici hanno uguali due lati e l'angolo compreso, anche i rimanenti lati ed angoli sono uguali	**Se due triangoli rettilinei hanno uguali due lati e l'angolo compreso, anche i rimanenti lati ed angoli sono uguali**

Riemann

Un *approccio quindi differenziale* di una geometria che prescinda del V postulato è il seguente.

- Ammettiamo di partire da una regione limitata di piano
- Concediamo come postulati quelle proposizioni elementari valide nella regione finita
- Ammettiamo che le proprietà della regione iniziale si possano estendere ad ogni introno di un punto qualunque del piano (non al piano completo in un solo sguardo, ma costruttivamente, estendendolo punto per punto)

Geometria sferica ed ellittica

Considerando le perpendicolari una retta esse si intersecano in un punto P da una parte e P' dall'altra aventi le stesse caratteristiche, in particolare l'equidistanza dalla retta

Si hanno due casi possibili

- *P* ed *P'* non coincidono, ma sono due punti distinti: due rette hanno perciò sempre due punti in comune e si intersecano in una coppia di punti distinti: questo sistema viene chiamato *Geometria sferica*, ed è assimilabile alla geometria euclidea della sfera se per "rette" assumiamo le circonferenze massime.
- *P* ed *P'* coincidono: due rette si incontrano in un solo punto e due punti distinti individuano una sola retta: questo secondo sistema viene chiamato *Geometria ellittica*

Coerenza

MODELLI EUCLIDEI: ($\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$, a)

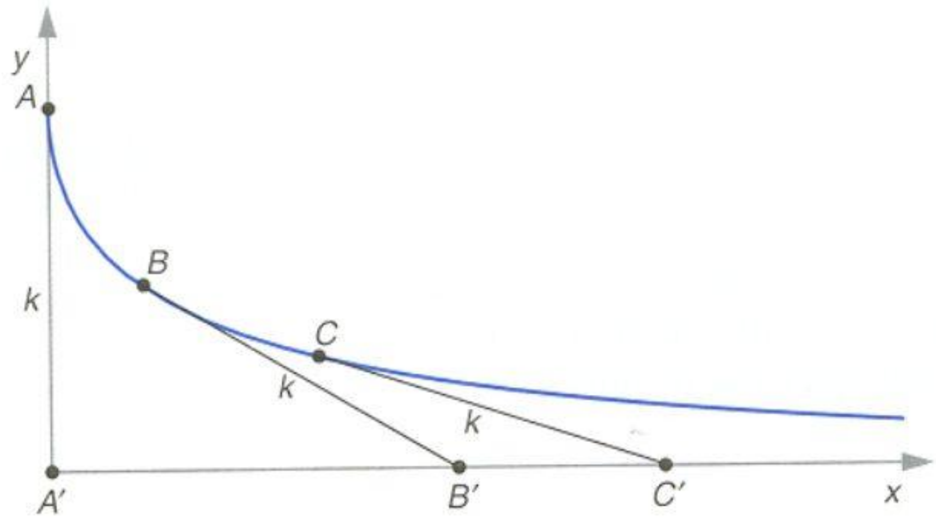
Interpretazione dei concetti primitivi di punto e retta e relazione di appartenenza

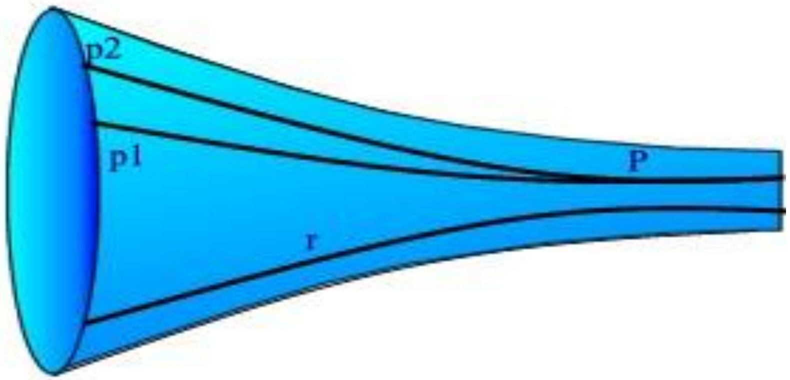
I POSTULATI DELLA GEOMETRIA NON EUCLIDEA DIVENTANO TEOREMI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA, I TEOREMI DELLA N.E. DIVENTANO TEOREMI DELLA E.

SE FOSSE CONTRADDITTORIA LA N.E. LO DOVREBBE ESSERE ANCHE LA E.

COERENZA RELATIVA

Beltrami (1868)





Non è una rappresentazione globale. Punti Critici

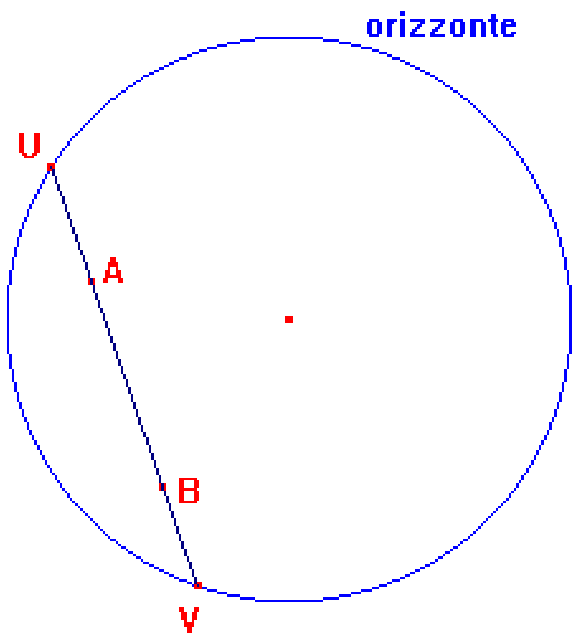
Klein-Beltrami (iperbolica)

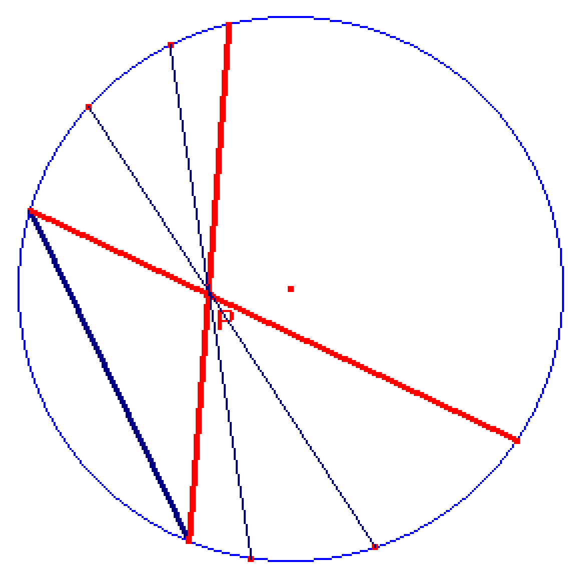
$$P := \{\textit{punti del piano strettamente inetrni ad una conica } \Gamma\}$$

$$R := \{\textit{corde di } \Gamma \textit{ esclusi i punti estremi}\}$$

∞

f la consueta relazione di appartenenza del piano euclideo





Metrica non euclidea

Distanza d(A,B) = k.| ln[(AU/AV)/(BU/BV)] | dove U e V sono gli estremi della corda passante per A e B

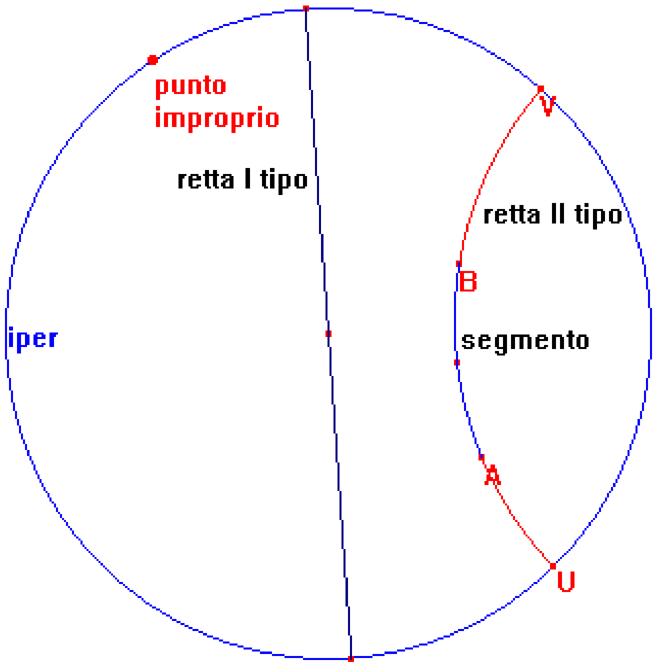
Osserviamo che con questa definizione di distanza valgono le seguenti proprietà:

- la distanza d(A;B) tra due punti è sempre non negativa
- la distanza d(A;A) = | ln 1 | = 0
- se ACB sono allineati d(AB)=d(AC)+d(CB)
- se A è un punto fisso e B varia sulla "retta" avvicinandosi all'orizzonte d(A;B) = ∞

$$< ab = \frac{1}{2i} \ln(abmn)$$

$$\frac{\sin(am)}{\sin(bm)} \div \frac{\sin(an)}{\sin(bn)}$$

Poincarè (iperbolica)



$$P := \{punti\ del\ \ piano\ strettamente\ inetrni\ ad\ un\ cerchio\ \Gamma\}$$

$$R := \{archi\ di\ cerchi\ ortogonali\ a\ \Gamma\ o\ diametri\ di\ \Gamma\ \ esclusi\ i\ punti\ estremi\}$$

d(A,B) = .| ln[(AU/AV)/(BU/BV)] |

Angolo: misura dell'angolo curvilineo (angolo tra le tangenti)

Ellittica e sferica

Geometria *semplicemente ellittica*

P coppia di punti sulla sfera diametralmente opposti
R insieme dei circoli massimi[1]
f la consueta relazione di appartenenza euclidea

oppure:

P punti sulla semisfera
R insieme degli archi di circoli massimi
f la consueta relazione di appartenenza euclidea

Geometria *doppiamente ellittica* (geometria sferica)

P punti sulla sfera
R insieme dei circoli massimi
f la consueta relazione di appartenenza euclidea

Nel web…

GEOMETRIA IPEROLICA

http://www.ngkszki.hu/~trembe/noneuclid/NonEuclid-Italian.html

GEOMETRIA SFERICA

http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria_sulla_sfera/geo.htm