Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{3} \approx 1,7321$ $\sqrt{5} \approx 2,2361$ $\sqrt{7} \approx 2,6458$ $\pi \approx 3,1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata consegnando l'apposito cartellino al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- **100 minuti dall'inizio**: termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Sogno di una notte di mezzo inverno

di

Guglielmo Scuotilancia

Secondo atto

8 marzo 2019

Coppa Gauss – Testi dei problemi(1)

1. *Ghirlande* (Luca Renzi)

Fate, elfi, Titania, Oberon, Puck sono insieme nella radura illuminata dalla luna.

Titania Puck, prendi questo cesto pieno di ghirlande e distribuiscile tra tutti noi per celebrare questa notte incantata. (*Puck prende il cesto*) Dai un ventesimo delle ghirlande nel cesto alla prima fata; dai un diciannovesimo delle ghirlande rimaste nel cesto alla seconda fata; dai un diciottesimo delle ghirlande rimaste nel cesto alla terza fata; dai un diciassettesimo delle ghirlande rimaste nel cesto alla quarta fata. Continui così con altre quindici fate. Poi dai le ghirlande rimaste a Oberon.

Oberon (*Protestando*) Ma ne resteranno pochissime. (*Si stupisce quando Puck gli dà* 10 *ghirlande*) Ma quante erano inizialmente le ghirlande nel cesto? (*Titania scuote la testa sconsolata.*)

2. *Oberon si arrabbia* (Sandro Campigotto)

Titania Oberon, qual è la somma di tutti i numeri da 0 a 9999 che si scrivono utilizzando le sole cifre 0 e 1? (*Oberon fugge nel bosco inveendo contro Puck.*)

3. *Ad Atene* (Giuseppe Rosolini)

Nella piazza centrale di Atene.

Ippolita (*Rivolta a Teseo*) Queste due piastrelle nere hanno qualche significato?

Teseo Sì.

Ippolita D'accordo hanno un significato, ma sai anche dirmi qual è? Vedo che una è quadrata, l'altra è un pentagono regolare; una ha un lato che combacia con un lato dell'altra, cioè le due mattonelle hanno lati di ugual lunghezza.

Teseo Chiama $ABCD$ il quadrato, $DEFGA$ il pentagono regolare. AB e AG sono lati adiacenti di un poligono regolare che verrà disegnato nella piazza a partire da questi due lati.

Ippolita Ma quanti lati ha quel poligono? (*Teseo sorride ebetemente.*)

4. *La nuova operazione* (Matteo Bobbio)

Ermia Guarda, Lisandro, ho trovato una nuova operazione $\triangle$ per numeri razionali positivi, utile anche per scrivere comodamente i numeri reali. È definita così

$$a \triangle b = \frac{ab+1}{b}.$$

Sembra complicata: provala! Se calcoli $1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (2 \triangle 2)))))))$ e moltiplichi il risultato per mille, che numero ottieni? (*Lisandro non ascolta, insegue Elena, mentre lei fuggendo urla la risposta.*)

5. *La tragedia* (Sandro Campigotto)

Cotogna (*Preparando il materiale per la rappresentazione della tragedia di Piramo e Tisbe*) Se, in un triangolo rettangolo ABC, l'angolo retto è in C e il quadrato $CDEF$ ha D su BC, E su AB e F su AC, quanto vale l'area del quadrato $CDEF$, sapendo che $AE = 20\,\text{cm}$ e $EB = 15\,\text{cm}$? (*Placido, distratto, sbatte contro il muro e lo fa crollare; tutti gli inveiscono contro.*)

(1) In ogni problema, a fianco del titolo, compare il nome dell'autore.

6. ***Carte*** (Luca Renzi)

Fondo (*Mentre cammina dietro agli altri nel bosco*) Che strano mazzo di carte! Ogni carta ha un numero su ciascuna faccia, non necessariamente uguali. E, se due carte hanno su una faccia lo stesso numero, non è detto che i numeri sull'altra faccia coincidano. (*Fondo si ferma e depone tutte le 60 carte del mazzo sul prato davanti a sé, in modo da vedere solo una faccia di ciascuna carta: vede tre 1 ,tre 2, tre 3,. . . ,tre 19, tre 20. Non si accorge che viene circondato dalle fate.*)

Kael Dietro a un multiplo di 5 c'è un numero pari.

Kale Dietro a un numero primo, se c'è una potenza di 2, questa deve essere con esponente dispari.

Kail Dietro alle potenze di 3 non c'è 19.

Kela Dietro ai multipli di 4 c'è un numero maggiore o uguale a 7.

Puck Fondo, quali carte devi girare per controllare che le fate hanno detto il vero?

[*Dare come risposta la somma dei numeri che sono visibili sulle carte che Fondo deve girare.*]

7. ***Primi e ultimi*** (Silvia Sconza)

Elena Qual è il più grande numero primo inferiore a 9999 tale che ogni cifra che lo compone sia un numero primo; ogni numero composto da due cifre vicine nel numero sia un numero primo; ogni numero composto da tre cifre vicine nel numero sia un numero primo? (*Lisandro si getta nel fiume.*)

8. ***La sostituzione*** (Mattia Fecit)

Cotogna Dobbiamo trovare come sostituire il muro, altrimenti non riusciamo a fare la scena tra Piramo e Tisbe.

Placido Ho un'idea! Considera un triangolo rettangolo con cateti di lunghezza 12 cm e 5 cm. Facciamo ruotare il triangolo intorno al cateto maggiore e usiamo il solido ottenuto come muro.

Cotogna Ho un'idea migliore: facciamo ruotare il triangolo intorno al cateto minore e usiamo il solido ottenuto come muro.

Voce fuori campo Quanto è 1000 volte il rapporto tra il volume del solido ottenuto da Placido e il volume del solido ottenuto da Cotogna?

9. ***Alberi*** (Matteo Bobbio)

Titania vede Fondo nel bosco e gli si avvicina.

Fondo (*Tra sé e sé*) Ma quanti alberi ci sono nel bosco?

Titania (*Guardando Fondo con occhi sognanti*) Ci sono più alberi che le cifre della rappresentazione decimale del risultato della moltiplicazione di 5^{4007} per 4^{2019}.

Voce fuori campo Quanti alberi ci sono come minimo nel bosco?

10. ***Le due fate*** (Alessandro Logar)

Titania Guarda, Fondo: le due fate Kael e Kale accendono le loro luci intermittenti. Kael accende la luce per 4 secondi, poi la spegne per 2; Kale l'accende per 3 secondi, poi la spegne per 5. Ora accendono la luce contemporaneamente.

Fondo Tra un'ora e tre quarti, quando farà giorno, per quanti secondi in totale le due luci saranno state accese entrambe?

11. ***Un dato truccato*** (Alessandro Murchio)

Titania Fai un gioco con me? Usiamo questo dado a sei facce truccato: la probabilità che esca un numero pari è 2019 volte la probabilità che esca un numero dispari (1, 3 e 5), ogni numero pari (2, 4 e 6) esce con la stessa probabilità—così pure per i numeri dispari.

Fondo Ora che so in che modo è truccato non c'è più trucco.

Titania (*Sorpresa dalla risposta intelligente*) Lancio il dado quattro volte e compongo un numero: l'esito del primo lancio è la cifra delle unità, l'esito del secondo quella della decine, poi l'esito del terzo quella delle centinaia, infine quella delle migliaia. Vinci se il numero ottenuto è un multiplo di 3.

Voce fuori campo Quanto vale la probabilità che Fondo vinca moltiplicata per 10000?

12. ***Aspettando*** (Mario De Simoni)

Flauto (*Nei panni di Tisbe*) Sto aspettando il mio amato Piramo. Nell'attesa riempirò questo pavimento, fatto di mattonelle quadrate bianche a scacchiera, di numeri interi positivi. Mi metto su una mattonella e scrivo 1; poi continuo così:

- se il quadrato a sinistra è vuoto, mi giro a sinistra, altrimenti non mi giro;
- scrivo il numero successivo del numero scritto sulla mattonella su cui sono sulla mattonella adiacente davanti a me;
- passo su quella mattonella.

(*Lentamente Flauto dopo quattro passi riempie un quadrato con i numeri da* 1 a 4, *dopo nove passi, ha riempito un quadrato con i numeri da* 1 a 9)

Fondo (*Fuori scena, nei panni di Piramo*) Mia adorata Tisbe, arrivo quando scriverai il numero n^2 dispari tale che il valore assoluto della differenza fra le somme dei numeri scritti sulle mattonelle delle due diagonali della scacchiera sia la maggiore possibile al di sotto di 2019. (*Teseo, Ippolita e tutto il pubblico scoppiano a ridere.*)

Ippolita Qual è il numero n a cui si riferisca Piramo? (*Teseo guarda nel vuoto.*)

13. ***Nel sacchetto*** (Sandro Campigotto)

Titania Facciamo un gioco. Io metto quattro palline blu in questo sacchetto. Tu, Puck, mettine due rosse; Fondo mettine tre gialle. (*Puck e Fondo fanno come istruiti*) Agitiamo il sacchetto per mescolare le palline. Ora estraiamo a caso una pallina alla volta. Vince chi, per primo, vedrà estratte tutte le palline che aveva gettato nel sacchetto. Qual è la probabilità che vinca Fondo?

[*Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

14. ***Sullo stagno*** (Giuseppe Rosolini)

Sullo stagno galleggia una lunga linea chiusa, composta da piccoli segmenti, tutti di uguale lunghezza: in totale sono 2019 *segmenti..*

Titania Vedi, Fondo. Ciascuno dei due estremi di ogni segmento è congiunto a un estremo di un altro segmento; è in questo modo che la linea resta chiusa. Con la linea giocano tre fate librandosi nell'aria e posandosi ciascuna leggera su uno dei 2019 estremi.

Fondo Le vedo: sono una rossa, una blu, una gialla.

Titania Quando si posano, la linea si muove e forma un triangolo che ha per vertici i tre estremi dove le tre fate si sono posate.

Fondo I triangoli (non degeneri) diversi che si possono formare in questo modo sono moltissimi.

Titania Sì. Basta che mi dici le quattro cifre che servono per scrivere il numero che li conta, elencate in ordine crescente da sinistra a destra.

[*Un triangolo è diverso da un altro esattamente quando almeno uno dei lati tra due fate nel primo triangolo ha lunghezza diversa da quello tra le* (*stesse*) *due fate nell'altro.*]

15. ***Il terreno diviso*** (Luca Renzi)

Titania Fondo, ho bisogno del tuo aiuto per dividere il terreno all'interno del recinto per sistemarvi elfi e fate. Voglio dividerlo tracciando soltanto linee di separazione continue che partono da un punto del recinto e terminano in un altro punto del recinto, tutte contenute al suo interno. Ogni linea viene tracciata facendo attenzione che incontri ciascuna altra linea tracciata in precedenza una sola volta, ma in modo da dividere il terreno nel maggior numero possibile di zone. (*Fondo si concentra*) In ogni zona che è delimitata anche dal recinto starà un elfo; nelle altre zone starà una fata in modo che la differenza tra il numero di fate e quello di elfi sia il più piccolo multiplo di 41 possibile. (*Guardando Fondo con gioia*) Quanti solchi devo far tracciare?

16. *Due colori* (Milo Orlich)

Fondo Le tue fate mi hanno spiegato che stanno inventando due colori, arangiallo e bligio, e li stanno sperimentando. Stanno cercando di decidere, stendendo due di questi colori in successione, quali siano i migliori "risultati finali"—eventualmente, anche risultati "imprevedibili"! Ad esempio, potrebbero fare in modo che, stendendo prima una mano di arangiallo e poi una di bligio si ottenga bligio, e magari con una di bligio seguita da una di arangiallo si abbia invece arangiallo, oppure che dandone prima una di arangiallo e poi un'altra di arangiallo si ottenga bligio ... L'importante è che il colore finale sia ancora uno tra arangiallo e bligio.

Titania Penso che l'effetto più utile sia che, stendendo prima un colore e poi un altro, si ottenga lo stesso effetto che si avrebbe invertendo l'ordine dei colori.

Fondo Sarebbe più interessante se, stendendo prima in successione un colore X e un colore Y, e aggiungendo poi un colore Z, si ottenesse lo stesso effetto che si avrebbe stendendo prima il colore X, e dopo un po' di tempo il colore ottenuto separatamente sulla tavolozza stendendo il colore Y seguito dal colore Z.

Voce fuori campo In quanti modi si può realizzare l'effetto proposto da Titania? E in quanti modi si può realizzare l'effetto proposto da Fondo?
[*Dare come risposta il prodotto del numero che risponde alla prima domanda e del numero che risponde alla seconda domanda.*]

17. *In fila* (Gabriele Balletti)

Titania Oberon ha sistemato quelle dieci palline nere in fila; contengono, in ordine a partire da sinistra, i numeri da 1 a 10. Poi le ha chiuse ermeticamente in modo che non si vedano i numeri che contengono e se n'è andato. Sembrano tutte uguali: (*uscendo di scena*) Puck, mio elfo, mescolale. (*Puck esegue l'ordine: dopo il rimescolamento la pallina in posizione k, per $k = 1, \dots, 10$, è nella posizione n_k*) (*Titania parla da fuori scena*) Puck, mio elfo, rimescolale. (*Puck esegue lo stesso rimescolamento precedente: in questo modo la pallina che, dopo il primo rimescolamento—e prima del secondo rimescolamento—, si trovava in posizione j, per $j = 1, \dots, 10$, ora si trova in posizione n_j*) (*Titania parla ancora da fuori scena*) Puck, mio elfo, rimescolale. (*Puck esegue lo stesso rimescolamento.*)

Oberon (*Fuori scena, urlando*) Puck, dove sono le dieci palline nella fila che avevo preparato? Fa che siano in ben ordine, altrimenti ti squarto!

Puck (*Terrorizzato*) Che cosa faccio ora?

Titania (*Entra*) Se hai usato sempre lo stesso rimescolamento, basta che esegui quel rimescolamento altre... (*non si capisce che cosa dice perché Oberon e gli elfi entrano in scena rumorosamente. Puck esegue rapidissimo lo stesso rimescolamento un numero fantastico di volte. Oberon apre le dieci palline e le trova ordinate in modo crescente da* 1 *a* 10 *a partire dalla prima pallina a sinitra, così come le aveva preparate prima di andarsene.*)

Voce fuori campo Quanti rimescolamenti ha fatto come minimo Puck, a partire dal primo ordinato da Titania, per essere certo di rimettere le palline nell'ordine predisposto da Oberon?

18. *Dammi il resto* (Alessandro Logar)

Ippolita Qual è il resto della divisione di 123456789101112 per 999? (*Teseo guarda i fiori.*)

19. *La domande di Oberon* (Giuseppe Rosolini)

Oberon Titania, puoi usare questi sei bastoncini, tutti della stessa lunghezza, uno giallo, uno blu, uno rosso, uno verde, uno viola e uno arancione, come lati di un tetraedro. Quanti tetraedri diversi puoi costruire?

20. *La domanda di Lisandro* (Mattia Fecit)

Lisandro Ermia, un numero intero positivo è *educato* se è divisibile per la somma delle sue cifre. Per esempio, tutti i numeri da 1 a 10 sono educati; 11 non è educato; 12 è educato; 13, 14, 15, 16 e 17 non sono educati. Siano A, B, C e D i primi quattro numeri educati consecutivi maggiori di 10. Quanto vale D?

21. *La domanda di Teseo* (Giuseppe Rosolini)

Teseo Ippolita, considerati tutti i numeri interi positivi a, b e c minori di 10000 tali che $a^4 + a \cdot b^3 = c^2$, qual è il valore massimo di $a + b + c$?

22. ***La domanda di Demetrio*** (Giuseppe Rosolini)

Demetrio Elena, considera le coppie di numeri pari positivi (a, d) con $a < d < 100$, e tali che la successione $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + n \cdot d, \ldots$, al variare di n tra i numeri naturali, non contiene potenze seconde di numeri naturali, ma contiene un numero infinito di potenze terze di numeri naturali. Prendi, tra queste, le coppie (a, d) tale che la differenza $d - a$ sia minima. Qual è la coppia (a, d) tra queste ultime con a minimo?

[*Dare la risposta indicando, nell'ordine, la cifra delle decine di a, la cifra delle unità di a, la cifra delle decine di d e la cifra delle unità di d.*]

23. ***Alla fine*** (Alessandro Logar)

Puck Caro pubblico, la commedia è finita, ma ho ancora un problema da suggerire: ci sono quattro punti del piano A, B, C e D tali che

- A, B, C stanno su una circonferenza C_1;
- A, C, D stanno su una circonferenza C_2;
- B, D stanno su una circonferenza C_3.

Le circonferenza C_1, C_2 e C_3 non hanno altri punti in comune. La circonferenza C_1 ha raggio $20\,\text{m}$, C_3 ha raggio $5\,\text{m}$, la lunghezza del segmento BC vale $40\,\text{m}$, la lunghezza del segmento AB vale $20\,\text{m}$. Il centro della circonferenza C_2 è O_2; chiamate E un punto su C_3. Vi chiedo di trovare il massimo valore d_1 che può assumere il segmento O_2E e il minimo valore possibile d_2 che può assumere il segmento O_2E. Ditemi quanto vale $d_1 - d_2$ in centimetri.

Fine

24. ***In camerino*** (Simone Muselli)

Finita la commedia, in camerino Puck prende un mazzo composto da 20 carte di due semi: cuori e picche. Ciascun seme è composto da un Asso, un Fante, un Re, una Regina e i numeri dal 2 al 7. È un giorno magico dopo una notte magica; dopo aver mischiato il mazzo, le carte cominciano a parlare: per $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ parlano

Carta contrassegnata dal numero n Mi seguono esattamente n carte del mio stesso seme.

Poi parlano le altre

Asso di cuori Le carte attaccate a me sono del mio stesso seme.
Asso di picche Le carte attaccate a me sono del mio stesso seme.
Fante di cuori Le carte attaccate a me sono del mio stesso seme.
Fante di picche Le carte attaccate a me sono del mio stesso seme.
Regina di cuori Le carte attaccate a me sono del mio stesso seme.
Regina di picche Le carte attaccate a me sono del mio stesso seme.
Re di cuori Le carte attaccate a me sono del mio stesso seme.
Re di picche Le carte attaccate a me sono del mio stesso seme.

Esattamente 2 carte, aventi lo stesso valore, mentono.

Voce fuori campo In quanti ordini possibili può presentarsi il mazzo?

Soluzioni

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara. Insieme a Sandro Campigotto, Alessandro Logar, Edi Rosset e Alberto Saracco che hanno anche una grossa parte nell'organizzazione e gestione delle gare a squadre, sono stati un aiuto fondamentale: Rodolfo Assereto, Gabriele Balletti, Matteo Bobbio, Andrea Damonte, Mario De Simoni, Mattia Fecit, Veronica Grieco, Bruk Mohamed, Alessandro Murchio, Simone Muselli, Cecilia Oliveri, Milo Orlich, Damiano Poletti, Luca Renzi, Silvia Sconza, Simone Traverso.
Sono tutti ex-giocatori che hanno svolto i loro studi universitari presso la Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.

Soluzione del problema 1. Sia g il numero di ghirlande inizialmente nel cesto. La prima fata riceve $\dfrac{1}{20}g$ ghirlande e $g - \dfrac{1}{20}g = \dfrac{19}{20}g$ restano nel cesto. La seconda fata riceve $\dfrac{1}{19} \cdot \dfrac{19}{20}g = \dfrac{1}{20}g$ e restano nel cesto $\dfrac{19}{20}g - \dfrac{1}{20}g = \dfrac{18}{20}g$ ghirlande. Una facile induzione mostra che ad ogni passo il numero di ghirlande diminuisce di $\dfrac{1}{20}g$. Dopo 19 fate, Oberon riceve il ventesimo gruppo di $\dfrac{1}{20}g$ ghirlande e sono 10. Dunque $g = 20 \cdot 10 = 200$. La risposta è `0200`.

Soluzione del problema 2. Usando soltanto cifre 0 e 1 si possono scrivere $2^4 = 16$ numeri. In ciascuna delle quattro posizioni si trova 0 otto volte e 1 otto volte e, sommandoli, non ci sarà riporto. La risposta è `8888`.

Soluzione del problema 3. Gli angoli di un poligono regolare di n lati hanno ampiezza $\pi\frac{n-2}{n}$. L'angolo ABC ha ampiezza $\frac{\pi}{2}$, l'angolo CBE ha ampiezza $\pi\frac{3}{5}$. L'angolo ABE ha ampiezza $\pi[2 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{5})] = \pi\frac{9}{10} = \pi\frac{18}{20}$. Il poligono ha 20 lati. La risposta è `0020`.

Soluzione del problema 4. Si noti che $a \triangle b$ è $a + \dfrac{1}{b}$ (e una sequenza $a_1 \triangle (a_2 \triangle (\ldots \triangle a_n) \ldots)$ con a_i intero positivo, $i = 1, 2, \ldots, n$, è una scrittura parziale di una frazione continua). Quando $a = 1$ e $b = \frac{p}{q}$, il valore di $a \triangle b$ è $1 + \frac{q}{p} = \frac{p+q}{p}$. Così la sequenza proposta genera una successione di Fibonacci:

$$\begin{aligned}
&1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (1 \triangle (2 \triangle 2))))))) = \\
&\quad = 1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \frac{5}{2}\right)\right)\right)\right)\right)\right) \\
&\quad = 1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \frac{7}{5}\right)\right)\right)\right)\right) = 1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \frac{12}{7}\right)\right)\right)\right) \\
&\quad = 1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \frac{19}{12}\right)\right)\right) = 1 \triangle \left(1 \triangle \left(1 \triangle \frac{31}{19}\right)\right) = 1 \triangle \left(1 \triangle \left(\frac{50}{31}\right)\right) \\
&\quad = 1 \triangle \frac{81}{50} = \frac{131}{81} = 1.6173
\end{aligned}$$

La risposta è `1617`.

Soluzione del problema 5. Siano a la lunghezza di AE, b la lunghezza di EB. Sia x la lunghezza di DE. I triangoli ABC, AEF e EBD sono simili. Perciò $a : b = \sqrt{a^2 - x^2} : x$, cioè

$$(a^2 + b^2)x^2 = a^2b^2.$$

Così $x^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2} = \dfrac{20^2 \cdot 15^2}{20^2 + 15^2} = 144$. La risposta è `0144`.

Soluzione del problema 6. Per verificare la prima regola, Fondo deve girare 5, 10, 15, 20 per vedere che dietro di esse vi sia effettivamente un pari e deve girare tutte le carte che non sono pari, cioè quelle con un numero dispari, per verificare che dietro di esse non vi sia un 5, un 10, un 15 o un 20. Per verificare la seconda regola, Fondo deve girare il 2—gli altri numeri primi li ha già girati perché sono dispari, quindi ha già visto qual è il numero dietro di loro—per verificare che dietro di esso vi sia una potenza con esponente dispari di 2. Deve anche girare il 4 e il 16 per verificare che dietro di essi non vi sia un numero primo. Per verificare la terza regola non serve girare ulteriori carte in quanto le potenze di 3 e 19 sono dispari. Per verificare l'ultima condizione, Fondo deve girare 8 e 12, che sono gli unici multipli di 4 che non sono ancora stati girati, e tutti i numeri strettamente minori di 7: l'unico da girare è il 6 in quanto gli altri sono già stati girati in precedenza. Le carte da non girare sono 14 e 18. La somma dei valori delle carte da girare è

$$3\left(\sum_{v=1}^{20} v-(14+18)\right)=3\cdot(210-32)=534.$$

La risposta è `0534`.

Soluzione del problema 7. Innanzitutto per la prima condizione le cifre del numero possono essere solo: 2, 3, 5, 7. Si osservi che dopo la cifra 7 e la cifra 5 può esserci solo la cifra 3; dopo la cifra 3 può esserci solo la cifra 7 e dopo la cifra 2 può esserci solo la cifra 3. Quindi gli unici possibili candidati a quattro cifre sono: 7373, dove però si ha 737 che è divisibile per 11, 5373 dove però 537 è divisibile per 3, 3737 dove però 737 è divisibile per 11 e 2373 dove però 273 è divisibile per 3. Non ci sono quindi numeri di quattro cifre che rispettano le condizioni.
I possibili numeri a tre cifre sono gli stessi numeri del caso precedente senza l'ultima cifra. Tra quelli l'unico primo è 373. La risposta è `0373`.

Soluzione del problema 8. Siano $a=12\,\mathrm{cm}$ la lunghezza del cateto maggiore, $b=5\,\mathrm{cm}$ quella del cateto minore. I due solidi formati sono due coni A e B rispettivamente con raggio di base uno il cateto minore e l'altro il cateto maggiore. Perciò $\dfrac{V_A}{V_B}=\frac{ab^2}{a^2b}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{12}\approx 0.4167$. La risposta è `0416`.

Soluzione del problema 9. $5^{4007}\cdot 4^{2019}=5^{4007}\cdot(2^2)^{2019}=(5\cdot 2)^{4007}\cdot 2^{31}=10^{4007}\cdot 2147483648$. Il numero 2147483648 seguito da 4007 zeri ha 4017 cifre. La risposta è `4018`.

Soluzione del problema 10. Kael ripete il ciclo ogni 6 secondi, Kale ripete il ciclo ogni 8 secondi, quindi il ciclo delle due luci si ripete ogni $\mathrm{mcm}(6,8)=24$ secondi e, in quei 24 secondi, le due luci rimangono contemporaneamente accese per 6 secondi. Un'ora e tre quarti sono 6300 secondi; poiché $6300=24\cdot 262+12$, il ciclo dei due fari si ripete 262 volte. Inoltre nei restanti 12 secondi restano contemporaneamente accesi per ulteriori 5 secondi. In conclusione restano accesi per $262\cdot 6+5=1577$. La risposta è `1577`.

Soluzione del problema 11. Sia p la probabilità che esca un numero pari. Osserviamo che qualunque sia l'esito delle prime tre estrazioni, il fatto che il numero completo sia o meno multiplo di 3 è totalmente stabilito dall'esito dell'ultimo lancio. Infatti, qualunque sia la somma dei primi 3 numeri ottenuti, per ottenere alla fine un multiplo di 3 si hanno chiaramente due soli esiti favorevoli, di cui uno pari e uno dispari. Quindi la probabilità che il numero completo sia multiplo di 3 è

$$\frac{p}{3}+\frac{1-p}{3}=\frac{1}{3}.$$

La risposta è `3333`.

Soluzione del problema 12. Di seguito la scacchiera dopo 9 passi:

9	8	7
2	1	6
3	4	5

In ogni quadrato di lato $2k+1$ numeri (il valore assoluto del)la differenza tra due estremi di un lato orizzonale è $2k$. Perciò il k-esimo quadrato contribuisce alla differenza per $4k$ e il numero massimo nel quadrato è $(2k+1)^2$. Il valore richiesto in un quadrato di lato $n = 2k+1$ è

$$\sum_{i=1}^{k} 4i = 4\frac{k(k+1)}{2} = \frac{2k(2k+2)}{2} = \frac{(n-1)(n+1)}{2} = \frac{n^2-1}{2}.$$

E $2 \cdot 2019 + 1 = 4039$. Il massimo n è 63. La risposta è `0063`.

Soluzione del problema 13. Le sequenze in cui vince Fondo sono quelle in cui l'ultima rossa e l'ultima blu si trovano dopo l'ultima gialla. Le possibile sequenze si scrivono separando due casi:

l'ultima rossa è dopo l'ultima blu La sequenza sarà quindi del tipo "...G...B...R", dove G, B, R sono, in questo caso, l'ultima gialla, l'ultima blu e l'ultima rossa. Le altre palline gialle saranno prima di G e la sequenza sarà "...g...g...G...B...R", dove le g indicano palline gialle che non sono l'ultima. Le tre palline blu possono andare in tre dei quattro posti prima di B, l'ordine è irrilevante; ad esempio "...b...b...g...b...g...G...B...R". I modi sono $\binom{6}{3}$. Si ripete lo stesso ragionamento per le palline rosse e viene semplicemente $\binom{8}{1} = 8$. Quindi in questo caso abbiamo $\binom{6}{3} \cdot 8 = 160$ modi.

l'ultima rossa è prima dell'ultima blu Come in precedenza, disponendo prima le palline gialle (1 modo), poi la rossa (4 modi), infine le tre blu ($\binom{8}{3}$ modi), si ottiene $4 \cdot \binom{8}{3} = 224$ modi.

La probabilità cercata è $(160 + 224)/(9!/(2!3!4!)) = 32/105$. La risposta è `0137`.

Soluzione del problema 14. Sia $P = 2019$. Dato che le bisettrici hanno un punto comune, i tre lati di un triangolo di perimetro P si scrivono come $a+b$, $a+c$ e $b+c$ per tre numeri positivi a, b e c tali che $a+b+c = \frac{P}{2}$. Nel caso che P sia dispari, i tre numeri a, b e c sono razionali positivi con numeratore dispari e denominatore 2; così $a = n + \frac{1}{2}$, $b = m + \frac{1}{2}$ e $c = k + \frac{1}{2}$ e $n + m + k = \frac{P-3}{2} = p$. Le triple di numeri che verificano la condizione sono

$$\sum_{i=0} p(i+1) = p + 1 + \frac{p(p+1)}{2} = \frac{(p+2)(p+1)}{2} = 509545.$$

La risposta è `0459`.

Soluzione del problema 15. Ogni linea deve intersecare ogni linea già tracciata e, per dividere il piano nel maggior numero di zone, ogni punto di intersezione di quella con un'altra deve essere diverso da quelli già determinati. Si noti che, dopo il tracciamento della prima linea, ogni zona ha al massimo un solo lato in comune con il bordo esterno.

Sia n il numero di linee già tracciate. La $(n+1)$-esima retta incontra le altre, diciamo nell'ordine r_1, r_2, r_3,...,r_n. A partire da $n = 3$ una coppia di linee determina univocamente una zona; perciò da $n = 3$ la $(n+1)$-esima linea divide in due zone ogni zona tra le coppie di linee r_i e r_{i+1}, producendo così $n-1$ nuove regioni. Inoltre divide in due anche la regione di piano che percorre prima di incontrare r_1 e quella dopo r_n. Quindi in totale ha prodotto $n+1$ nuove regioni. Si noti che l'argomento vale anche per $n = 2, 3$, mentre per $n = 1$ le zone ottenute sono 2.

Perciò, per induzione, si determina immediatamente che il numero massimo di regioni in cui n rette dividono il terreno è $\dfrac{(n+1)n}{2} + 1$.

Proviamo per induzione che il massimo numero di zone interne prodotte con la linea $(n+1)$-esima è $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Tracciando la prima (e la seconda) linea, il numero di zone interne prodotte è 0 come $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ per $n = 1$ (ed anche per $n = 2$). Tracciando la terza linea si produce esattamente una zona interna.

Supponiamo sia così dopo aver tracciato n linee e proviamo che questo vale anche dopo aver tracciato la successiva $(n+1)$-esima linea. Ciascuna coppia di linee r_i e r_{i+1}, $1 \leq i \leq n$, determina una zona esterna o una zona interna. Nel primo caso, la linea $n+1$-esima separa la zona (esterna) in una esterna e una interna; nel secondo caso, separa la zona (interna) in due. In ogni caso genera una nuova zona interna. Inoltre, quando la linea $n+1$-esima collega il bordo alla linea r_1 e alla linea r_n, determina soltanto zone esterne. In totale vengono prodotte $n-1$ nuove regioni interne; grazie all'ipotesi induttiva si trova che

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n-1=\frac{((n+1)-1)((n+1)-2)}{2}.$$

Dato che una zona è esterna quando non è interna il problema chiede di trovare quando $2\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{n^2-7n+2}{2}$ è un multiplo di 41, cioè

$$n^2-7n+2=82k.$$

Per avere soluzioni intere il discriminante $41+328k=41(1+8k)$ dell'equazione in n deve essere un quadrato perfetto. Il minimo k che fornisce questo deve essere tale che $1+8k$ sia un multiplo di 41 e $1+8\cdot 5=41$. Perciò il numero di linee da tracciare è $\frac{7+\sqrt{41^2}}{2}=24$. La risposta è 0024.

Soluzione del problema 16. Titania vuole che valga la proprietà commutativa, Fondo la proprietà associativa.
Su un insieme di 2 elementi, che indichiamo con $\{0,1\}$, si possono definire 16 operazioni binarie (il primo argomento compare nella colonna esterna, il secondo argomento compare sulla riga esterna):

$$\begin{array}{c|cc} \star_1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_3 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_4 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_5 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_6 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} \star_7 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_8 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_9 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_{10} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_{11} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_{12} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} \star_{13} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_{14} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_{15} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \star_{16} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Dato che il dominio è di due elementi, un'operazione $\star$ commutativa è associativa se e solo se $(0\star 1)\star 0 = 1\star(0\star 0)$ e $(0\star 1)\star 1 = 0\star(1\star 1)$. Si vede che le operazioni commutative sono $\star_1$, $\star_2$, $\star_7$, $\star_8$, $\star_9$, $\star_{10}$, $\star_{15}$ e $\star_{16}$. Perciò $\star_1$, $\star_2$, $\star_7$, $\star_8$, $\star_{10}$, $\star_{16}$ sono anche associative. Poi si vede che, tra le rimanenti, $\star_4$ e $\star_6$ sono associative.
Scrivendo 1 per vero, 0 per falso, si vede che $\star_2$ è la congiunzione logica; $\star_8$ è la disgiunzione logica; $\star_{14}$ è l'implicazione matematica; $\star_{10}$ è l'equivalenza. Inoltre $\star_4$ e $\star_6$ sono rispettivamente la prima e la seconda proiezione. Altre sei operazioni si ottengono applicando l'operazione (unaria) di negazione a queste. Delle rimanenti quattro $\star_1$ e $\star_{16}$ sono le due operazioni binarie costanti—una negazione dell'altra, così come $\star_5$ e $\star_{12}$. La risposta è 0064.

Soluzione del problema 17. Per essere certi di essere tornati alla disposizione iniziale, occorre un numero di rimescolamenti che sia multiplo di quelli necessari per qualsiasi disordinamento effettuabile con 10 palline. Il minore tra questi è il minimo comune multiplo dei periodi di tutti i rimescolamenti possibili. Per ogni numero da 1 a 10 esistono rimescolamenti con tale periodo e il periodo massimo è 10. Perciò il risultato è $\mathrm{mcm}(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)=2520$ (che è anche il numero di stadi nel meridiano terrestre, come determinato da Eratostene). La risposta è 2520.

Soluzione del problema 18.

$$\begin{aligned} 123456789101112 &= 112\cdot 1000^0+101\cdot 1000^1+789\cdot 1000^2+456\cdot 1000^3+123\cdot 1000^4 \\ &= 112\cdot(999+1)^0+101\cdot(999+1)^1+\cdots+123\cdot(999+1)^4 \\ &= 112+101+789+456+123 \pmod{999} \\ &= 1581 \pmod{999} \\ &= 581\cdot 1000^0+1\cdot 1000^1 \pmod{999}. \end{aligned}$$

Quindi il resto della divisione di 123456789101112 per 999 è 582.
La risposta è 0582.

Soluzione del problema 19. Costruito il tetraedro, lo si appoggi sul tavolo con il lato colorato giallo davanti. Il lato blu può essere (l'unico) non a contatto con il lato giallo oppure può essere a contatto con il lato giallo. Nel primo caso, si ruoti il tetraedro in modo che il lato rosso sia appoggiato sul tavolo: il lato rosso può uscire dal vertice destro del lato giallo oppure dal vertice sinistro. In ciascuno di questi casi gli altri tre colori verde, viola e arancione possono essere disposti in $3! = 6$ modi diversi. Nel secondo caso, il lato blu può uscire dal vertice destro del lato giallo oppure dal vertice sinistro. In ciascuno di questi casi gli altri quattro colori possono essere disposti in $4! = 24$ modi. In totale i tetraedri che si possono ottenere sono $2 \cdot 6 + 2 \cdot 24 = 60$. La risposta è 0060.

Soluzione del problema 20. La condizione perché un numero $10a + b$ con $a > 0$ di due cifre sia educato è che $a + b \mid 9a$. Si noti innanzi tutto che un numero con $b = 9$ è educato se $9 \mid 8a$, dunque $a = 9$. Inoltre 101 è primo, perciò non è educato, mentre 98 non è divisibile per 17. Di conseguenza, una sequenza di quattro numeri educati consecutivi di due cifre deve cadere in un intervallo compreso tra $10a$ e $10a + 8$. Del resto, se $10a + b$ è il primo di una sequenza di quattro numeri educati consecutivi deve accadere che

$$a + b \mid 9a \quad a + b + 1 \mid 9a \quad a + b + 2 \mid 9a \quad a + b + 3 \mid 9a.$$

Uno di questi è un multiplo di 3, uno è un multiplo di 4. Perciò deve essere che $12 \mid 9a$, cioè $6 \mid a$. Ma 61 e 67 sono primi, dunque non educati; $6 + 4 = 10 \nmid 64$ che non è educato. Perciò D è maggiore di 105.
La condizione perché un numero $10^2a + 10b + c$ con $a > 0$ di tre cifre sia educato è che

$$a + b + c \mid 99a + 9b = 9(11a + b). \tag{†}$$

In modo simile al caso con due cifre, si vede dapprima che un numero con $c = 0$ è educato quando $a + b \mid 9(11a + b)$, cioè $a + b \mid 2 \cdot 3^2 \cdot 5a$.
Tra i numeri superiori a 100 la cui ultima cifra è 9 e la somma $a + b$ non è un multiplo di 3, sono perciò educati quelli che verificano $a + b + 9 \mid (11a + b)$, cioè $a + b + 9 \mid (10a - 9)$: sono 209 e 629. Ma 208 e 211 non sono educati così come 628 e 631; perciò nessuno tra 209 e 629 compare in una sequenza di quattro numeri educati consecutivi. Per i restanti, quando $a + b$ è un multiplo di 3, deve comunque essere verificata (†) e si trovano 399 e 999. Ma 398, 401, 998 e 1001 non sono educati; così neppure 399 e 999 possono comparire in una delle sequenze cercate.
Inoltre, tra i numeri superiori a 100 la cui ultima cifra è 1 e la somma $a + b + 1$ non è un multiplo di 3, sono educati quelli che verificano $a + b + 1 \mid (11a + b)$, cioè $a + b + 1 \mid 10a - 1$: sono 481 e 511. Ma 479 e 482 non sono educati. Invece 510, 512 e 513 sono educati: questa è una delle sequenze appropriate.
Rimane perciò da considerare se esistono sequenze inferiori a questa. D'ora in poi ci limiteremo a numeri inferiori a 510, ma tutte le considerazioni che faremo valgono in generale.
Per i restanti numeri superiori a 100 la cui ultima cifra è 1, grazie a (†) si trovano 111, 171, 201, 261, 351, 441, 531, 621, 711 e 801. Ma 109 e 113 non sono educati, come 170 e 172, 199 e 202, 260, 350, 439 e 442.
Ne segue che una sequenza di quattro numeri educati consecutivi (inferiori a 510) non può coinvolgere numeri la cui ultima cifra sia 9 oppure 1, di conseguenza neppure 0.
Così si può svolgere anche la seconda osservazione fatta nel caso di due cifre: per avere una sequenza di quattro numeri educati consecutivi deve essere $4 \mid 9(11a + b)$, cioè

$$4 \mid (11a + b) \tag{‡}$$

dato che le prime due cifre dei numeri in una tale sequenza non possono cambiare. Le possibili coppie (a, b) che verificano (‡), con i rispettivi valori di $11a + b$ e $a + b$, sono

a	1		2		3		4		5		6	…
b	1	5	2	6	3	7	4	8	1	5	…	
$11a+b$	$2^2 \cdot 3$	2^4	$2^3 \cdot 3$	$2^2 \cdot 7$	$2^2 \cdot 3^2$	$2^3 \cdot 5$	$2^4 \cdot 3$	$2^2 \cdot 13$	$2^5 \cdot 7$	…		
$a+b$	2	6	4	8	6	10	8	12	6	…		

Si noti ora che, se $A = 10^2 a + 10b + c$ è il primo di una sequenza di quattro numeri educati consecutivi, a seconda del valore di $a + b$, uno dei divisori di $11a + b$ è 5 oppure 7. Questa osservazione permette di eliminare tutti i casi escluso $(a, b) = (3, 7)$. Ma sappiamo già che 371 non è educato, dunque un'eventuale sequenza richiederebbe che $14 = 3+7+4 \mid 2^3 \cdot 5$. $\lightning$
La risposta è `0513`.

Soluzione del problema 21. Le soluzioni dell'equazione sono tutte e sole le terne della forma $(n, 2n, 3n^2)$. Le osservazioni per dimostrare ciò sono le seguenti: siano a, b, c interi positivi tali che $a^4 + a \cdot b^3 = c^2$.

(i) Sia p un numero primo; se $p \mid b$ e $p \mid c$, allora $p \mid a$.

(ii) Sia p un numero primo; se $p \mid a$, allora $p \mid c$ e $p \mid b$.

(iii) Sia $d = \mathrm{MCD}(a, b)$; se $a' = \frac{a}{d}$, $b' = \frac{b}{d}$, allora $c' = \frac{c}{d^2}$ è intero e $a'^4 + a' \cdot b'^3 = c'^2$.

(iv) Se $a = 1$, allora $b = 2$ e $c = 3$.

Il punto (i) discende dalla relazione $a^4 = c^2 - a \cdot b^3$.
Il punto (ii) è immediato dalla relazione $a^4 + a \cdot b^3 = c^2$.
Il punto (iii) è immediato dalle relazioni $c^2 = a(a^3 + \cdot b^3)$ e $b^3 = \frac{c^2 - a^4}{a}$.
Il punto (iv) si dimostra come segue: con l'intenzione di ottenere un assurdo, supponiamo che b sia dispari. Perciò c è pari; dunque $2 \mid a$. $\lightning$
Così b è pari e c è dispari, diciamo $b = 2b_1$ e $c = 2c_1 + 1$. Dunque $8b_1^3 = (c-1)(c+1) = 4c_1(c_1+1)$ e $2b_1^3 = c_1(c_1+1)$. Se p è primo e γ è il massimo tale che $p^\gamma \mid c_1$, allora $p^\gamma \mid c_1 + 1$ e $\gamma = 0$. Per l'arbitrarietà di p, si ha che $c_1 = 1$, da cui $b_1 = 1$, $b = 2$ e $c = 3$.
Considerata una generica terna (a, b, c) tale che $a^4 + a \cdot b^3 = c^2$, sia $d = \mathrm{MCD}(a, b)$. Per (iii), presi $a' = \frac{a}{d}$, $b' = \frac{b}{d}$ e $c' = \frac{c}{d^2}$, si ha che $a'^4 + a' \cdot b'^3 = c'^2$. Ma $\mathrm{MCD}(a', b') = 1$; dunque, per (ii) $a' = 1$, e $b' = 2$ e $c' = 3$ per (iv). Così $a = d$, $b = 2d$ e $c = 2d^2$.
A questo punto, dato che $\sqrt{10000/3} \approx 57.74$, la somma massima possibile si ottiene per $a = 57$ ($b = 114$ e $c = 9747$) e vale $a + b + c = 3(a + a^2) = 9918$. La risposta è `9918`.

Soluzione del problema 22. Una successione $a, a+d, a+2d, \dots, a+n \cdot d, \dots$ verifica le due proprietà quando l'equazione $x^2 = a (\mathrm{mod}\, d)$ non ha soluzioni e l'equazione $x^3 = a (\mathrm{mod}\, d)$ ha (almeno una) soluzione. Infatti, la prima è ovvia. Per la seconda, si consideri un numero x tale che $x^3 = a (\mathrm{mod}\, d)$, cioè $x^3 = a + nd$ per qualche n intero. Dato che $(x+m)^3 = x^3 + 3mx^2 + 3m^2x + m^3$, basta prendere $m = \ell d$: si trova che

$$(x + \ell d)^3 = x^3 + 3x^2 \ell d + 3\ell^2 d^2 x + \ell^3 d^3 = a + d(n + 3x^2 \ell + 3\ell^2 dx + \ell^3 d^2).$$

Questo assicura un'infinità di potenze terze nella successione.
La soluzione $x = 2$ per l'equazione $x^3 = 8 (\mathrm{mod}\, 10)$ suggerisce di controllare se l'equazione $x^2 = 8 (\mathrm{mod}\, 10)$ ha soluzione. È immediato vedere che non ce ne sono perché nessuna cifra ha quadrato che termina con 8, ma torna utile, anche per i calcoli successivi, prepararsi la tabella dei possibili valori di x, con i corrispondenti valori del quadrato e del cubo:

x	2	4	6	8
x^2	4	16	36	64
x^3	8	64	216	512

Dato che la differenza $d - a = 10 - 8 = 2$ è certamente minima, basta controllare se ci sono coppie (a, d) che verificano la proprietà con $a < d < 10$ con $d - a = 2$.
Il primo d pari tale che l'equazione $x^2 = 2 (\mathrm{mod}\, d)$ ha soluzione è $d = 14$, per $x = 4$. Tra i d fino a 14 l'equazione $x^3 = 2 (\mathrm{mod}\, d)$ ha soluzione nei casi $d = 6$, per $x = 2$, e $d = 10$, per $x = 8$, ma le differenze $d - a$ sono maggiori di 2.
L'equazione $x^2 = 4 (\mathrm{mod}\, d)$ ha soluzione per ogni d pari maggiore di 4, per $x = 2$.
L'equazione $x^2 = 6 (\mathrm{mod}\, d)$ ha soluzione nel caso $d = 10$, per $x = 6$. L'equazione $x^3 = 6 (\mathrm{mod}\, d)$ ha soluzione soltanto nel caso $d = 10$, ancora per $x = 6$. La risposta è `0810`.

Soluzione del problema 23. Il triangolo ABC è rettangolo in A e BC è un diametro di C_1. Inoltre AC vale $20\sqrt{3}$. Poiché la circonferenza C_3 incontra la circonferenza C_1 solo nel punto B, essa deve essere tangente a C_1 in B. Ci sono quindi due possibilità: o è tangente internamente a C_1 o esternamente. La circonferenza C_2 ha il centro O_2 sull'asse del segmento AC. Detto H il punto d'incontro dell'asse di AC con AC stesso, poniamo $HO_2 = x$. Pertanto il raggio di C_2 vale $O_2A = \sqrt{x^2 + (10\sqrt{3})^2} = \sqrt{x^2 + 300}$. La circonferenza C_2 incontra la circonferenza C_3 nel solo punto D, quindi devono essere tangenti in D. Allora il raggio di C_2 deve essere $O_2O_3 - r_3$, dove $r_3 = 5$ è il raggio di C_3. Sia K la proiezione di O_3 sull'asse di AC.

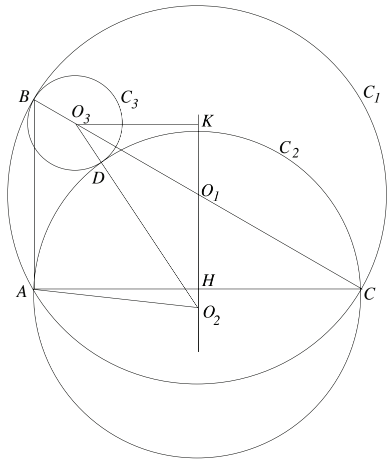
Caso 1: C_3 tangente internamente.

$O_3K = 3/4 \cdot AH = 15\sqrt{3}/2$ e $HK = 7/8 \cdot AB = 35/2$, quindi $O_2O_3^2 = O_3K^2 + O_2K^2 = (15\sqrt{3}/2)^2 + (35/2 + x)^2$. Abbiamo così calcolato il raggio di C_2 in due modi diversi e si ottiene allora l'equazione:

$$\sqrt{\left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2} + x\right)^2} - 5 = \sqrt{x^2 + 300}$$

cioè:

$$\left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2} + x\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + 300} + 5\right)^2$$



che si trasforma in $7x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 300}$ (quindi $x \geq -30/7$). Quadrando si ottiene l'equazione $3x^2 + 28x - 20 = 0$ che ha per unica soluzione accettabile $x = 2/3$. Allora il raggio di C_2 vale $52/3$.

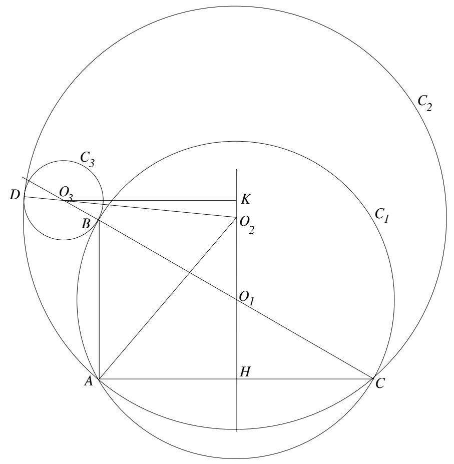
Caso 2: C_3 tangente esternamente.

I conti sono simili ai precedenti. Ora $O_3K = 5/4 \cdot AH = 25\sqrt{3}/2$ e $HK = 9/8 \cdot AB = 45/2$. Quindi $O_2K = 45/2 - x$ e il raggio di C_2 vale sia O_2A sia $O_2O_3 + 5$, da cui si ottiene:

$$\sqrt{\left(\frac{25\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{45}{2}\right)^2} + 5 = \sqrt{x^2 + 300}$$

da cui si ottiene l'equazione $77x^2 - 2340x + 15700 = 0$ che ha per unica soluzione accettabile $x = 1570/77$. Con questo valore di x il raggio di C_2 è $2060/77$.

Se viene ricercata la lunghezza massima del segmento di O_2E con E su C_3, nel primo caso il punto E va scelto diametralmente opposto a D, nel secondo caso va scelto coincidente con D. Nel primo caso si ottiene $52/3 + 10$, nel secondo caso di ottiene il raggio di C_2, cioè $2060/77$. Tizio quindi deve trovare $d_1 = 82/3$. Analogamente la distanza minima si ottiene nel primo caso scegliendo E coincidente con D, nel secondo caso scegliendo E su C_3, diametralmente opposto a D. Caio deve quindi aver trovato il minimo di questi due valori, cioè $d_2 = 1290/77$. Quindi $d_1 - d_2 = 2444/231$. La risposta è quindi 1058.



La risposta è 1058.

Soluzione del problema 24. Per prima cosa bisogna osservare che, se le carte con un numero dicono la verità, esse devono essere in sequenza in ordine decrescente, per seme: infatti se anche solo con il 2 così non fosse, al 7 seguirebbero 7 carte dello stesso seme e al 2, 2 carte dello stesso seme, in totale 11 carte di un seme, il che è impossibile.
Supponiamo che a mentire sia una coppia di carte senza un numero. All'interno del mazzo ci deve essere una coppia di carte consecutive di semi diversi. La prima delle due carte non può essere una carta con un numero (perché la segue una carta di seme diverso), né una carta senza numero che dice il vero: deve pertanto essere una delle due carte che mente; supponiamo sia rossa per semplicità. A seguire ci può essere, a priori, o il 7 o la carta che mente dell'altro seme, come sopra detto, supponiamo nero. Se fosse il 7, seguirebbero esattamente 7 carte nere, non tutte quindi, pertanto ci deve essere un secondo punto del mazzo, precedente a queste carte nere numerate, in cui due carte consecutive hanno semi diversi. Con un ragionamento uguale al precedente si può concludere che la prima di queste due carte deve essere l'altra che mente, ovvero la nera. Abbiamo pertanto disposto le carte bugiarde e il mazzo si presenta fino ad adesso come una serie di carte nere che finiscono con quella che mente, una serie di carte rosse che finiscono con quella che mente e ancora una serie di carte nere. Ma questo è impossibile: infatti il 7 rosso dovrebbe essere la prima carta rossa ma in questo modo sarebbe seguito da 9 carte rosse invece che 7. Pertanto le due carte che mentono sono consecutive e rappresentano l'unico cambiamento di seme del mazzo. A questo punto la scelta è "obbligata": due carte senza numero sincere, le carte dal 7 al 2, una carta senza numero sincera e la carta bugiarda di un seme, seguita dalla carta bugiarda, una carta senza numero sincera, le carte dal 7 al 2 e due carte senza numero sincere dell'altro seme. I modi possibili per questo caso sono pertanto: $2 \cdot 4 \cdot (3!)^2 = 288$.
Supponiamo che a mentire sia un numero diverso da 7. Si osservi che, in questo caso, le carte dal 7 a 2 saranno sempre consecutive in ordine decrescente, considerando che nel posto occupato dal numero bugiardo ci sarà invece una delle carte senza numero. Il ragionamento si sviluppa, poi, in modo del tutto analogo al caso precedente, arrivando a concludere, anche in questo caso che le due carte bugiarde sono consecutive al centro del mazzo e rappresentano l'unico cambio di seme tra due carte consecutive. Come prima, a questo punto la scelta è obbligata e i modi possibili per questo caso sono: $2 \cdot 5 \cdot (4!)^2 = 5760$.
Supponiamo infine che le carte bugiarde siano quelle contrassegnate dal numero 7. Supponiamo vi sia uno dei due semi le cui carte non sono tutte vicine ma separate in almeno due blocchi da almeno una carta dello stesso seme. Come già osservato nei casi precedenti, ciò comporterebbe "due cambi di seme" e siccome per ogni cambio la carta che precede deve mentire, non possono esserne altri. Consideriamo le due carte consecutive di semi diversi che costituiscono il primo cambio di seme. La seconda, dovendo dire la verità non può essere una delle carte senza numero (perché preceduta da una carta di seme differente), ma neanche un numero (perché è seguita da ben 9 carte del suo stesso seme). Quindi anche in questo caso vi è un solo cambio di seme, costituito dalle due carte che mentono. Per questo caso pertanto i modi possibili sono: $2 \cdot (4!)^2 = 1152$.
La risposta pertanto è $288 + 5760 + 1152 = 7200$. La risposta è 7200.