Terne Pitagoriche

Pitagora, Euclide e la Carega della Sposa

prof. Andrea Albiero

Olimpiadi della Matematica

6 novembre 2009

Il Teorema di Euclide

Tutti quanti conoscerete questo enunciato:

Tutti quanti conoscerete questo enunciato:

Proposizione 8, libro VI

> *Se in un triangolo rettangolo si conduce dall'angolo retto alla base, i triangoli così formati saranno simili al dato e simili tra loro.*

Tutti quanti conoscerete questo enunciato:
Proposizione 8, libro VI

> *Se in un triangolo rettangolo si conduce dall'angolo retto alla base, i triangoli così formati saranno simili al dato e simili tra loro.*

proposta nell'edizione del 1930 a cura di F.Enriques, degli "Elementi" di Euclide.

Tutti quanti conoscerete questo enunciato:
Proposizione 8, libro VI

> *Se in un triangolo rettangolo si conduce dall'angolo retto alla base, i triangoli così formati saranno simili al dato e simili tra loro.*

proposta nell'edizione del 1930 a cura di F.Enriques, degli "Elementi" di Euclide.
No?

Il Teorema di Euclide

Tutti quanti conoscerete questo enunciato:

Proposizione 8, libro VI

> *Se in un triangolo rettangolo si conduce dall'angolo retto alla base, i triangoli così formati saranno simili al dato e simili tra loro.*

proposta nell'edizione del 1930 a cura di F.Enriques, degli "Elementi" di Euclide.
No? giusto voi le conoscete così:

Il Teorema di Euclide

"Il quadrato costruito su di un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa."

Il Teorema di Euclide

> *"Il quadrato costruito su di un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa."*

o meglio:

Il Teorema di Euclide

"Il quadrato costruito su di un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa."

o meglio:

"In un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa."

Il Teorema di Euclide

“Il quadrato costruito su di un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni la sua proiezione sull’ipotenusa e l’ipotenusa stessa.”

o meglio:

“In un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull’ipotenusa e l’ipotenusa stessa.”

$$p : c = c : ip$$

Teorema di Pitagora

A questo punto cerchiamo di vedere come dai due Teoremi di Euclide, si possa passare velocemente al Teorema di Pitagora.

A questo punto cerchiamo di vedere come dai due Teoremi di Euclide, si possa passare velocemente al Teorema di Pitagora. Chiamiamo p la proiezione del cateto $c_1 = a$, q quella del cateto $c_2 = b$, e l'ipotenusa $ip = c$;

Teorema di Pitagora

A questo punto cerchiamo di vedere come dai due Teoremi di Euclide, si possa passare velocemente al Teorema di Pitagora. Chiamiamo p la proiezione del cateto $c_1 = a$, q quella del cateto $c_2 = b$, e l'ipotenusa $ip = c$; riscriviamo entrambe le relazioni relative ai due cateti:

$$
{c_1}^2 = a^2 = ip \cdot q \qquad \text{e} \qquad {c_2}^2 = b^2 = ip \cdot p
$$

A questo punto cerchiamo di vedere come dai due Teoremi di Euclide, si possa passare velocemente al Teorema di Pitagora. Chiamiamo p la proiezione del cateto $c_1 = a$, q quella del cateto $c_2 = b$, e l'ipotenusa $ip = c$; riscriviamo entrambe le relazioni relative ai due cateti:

$$c_1{}^2 = a^2 = ip \cdot q \qquad \text{e} \qquad c_2{}^2 = b^2 = ip \cdot p$$

Sommando le due espressioni otteniamo la relazione più conosciuta:

$$a^2 + b^2 = ip \cdot (p + q) = ip^2 = c^2$$

A questo punto cerchiamo di vedere come dai due Teoremi di Euclide, si possa passare velocemente al Teorema di Pitagora. Chiamiamo p la proiezione del cateto $c_1 = a$, q quella del cateto $c_2 = b$, e l'ipotenusa $ip = c$; riscriviamo entrambe le relazioni relative ai due cateti:

$$c_1{}^2 = a^2 = ip \cdot q \qquad \text{e} \qquad c_2{}^2 = b^2 = ip \cdot p$$

Sommando le due espressioni otteniamo la relazione più conosciuta:

$$a^2 + b^2 = ip \cdot (p + q) = ip^2 = c^2$$

Ma non è così!

Infatti:

Proposizione 48, libro I

> *In un triangolo retto, il quadrato costruito sull'ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

Infatti:

Proposizione 48, libro I

> *In un triangolo retto, il quadrato costruito sull'ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

e il suo inverso:

Infatti:

Proposizione 48, libro I

> *In un triangolo retto, il quadrato costruito sull'ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

e il suo inverso:

Proposizione 49, libro I

> *Se in un triangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, esso è retto.*

Teorema di Pitagora

Infatti:

Proposizione 48, libro I

> *In un triangolo retto, il quadrato costruito sull'ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

e il suo inverso:

Proposizione 49, libro I

> *Se in un triangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, esso è retto.*

Ma perché è posto a conclusione del primo libro e non nel libro delle similitudini fra figure?

Infatti:

Proposizione 48, libro I

> *In un triangolo retto, il quadrato costruito sull'ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

e il suo inverso:

Proposizione 49, libro I

> *Se in un triangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, esso è retto.*

Ma perché è posto a conclusione del primo libro e non nel libro delle similitudini fra figure? E come si dimostra?

Infatti:

Proposizione 48, libro I

> *In un triangolo retto, il quadrato costruito sull'ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

e il suo inverso:

Proposizione 49, libro I

> *Se in un triangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa, è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, esso è retto.*

Ma perché è posto a conclusione del primo libro e non nel libro delle similitudini fra figure? E come si dimostra? E la "relazione inversa" $b^2 = c^2 - a^2$ è uno degli scopi del Teorema di Pitagora il cui motto della Scuola è "Tutto è numero"?

Proviamo a vedere meglio il significato del Teorema di Pitagora, così come fu dimostrato da Diofanto nell'*Arithmetica*:

Proviamo a vedere meglio il significato del Teorema di Pitagora, così come fu dimostrato da Diofanto nell'*Arithmetica*: siano $m, n \in \mathbb{Z}$. Definiamo:

$$a = m^2 - n^2$$

Proviamo a vedere meglio il significato del Teorema di Pitagora, così come fu dimostrato da Diofanto nell'*Arithmetica*: siano $m, n \in \mathbb{Z}$. Definiamo:

$$\begin{aligned} a &= m^2 - n^2 \\ b &= 2m \cdot n \end{aligned}$$

Terne Pitagoriche

Proviamo a vedere meglio il significato del Teorema di Pitagora, così come fu dimostrato da Diofanto nell'*Arithmetica*: siano $m, n \in \mathbb{Z}$. Definiamo:

$$\begin{aligned} a &= m^2 - n^2 \\ b &= 2m \cdot n \\ c &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

Proviamo a vedere meglio il significato del Teorema di Pitagora, così come fu dimostrato da Diofanto nell'*Arithmetica*: siano $m, n \in \mathbb{Z}$. Definiamo:

$$\begin{aligned} a &= m^2 - n^2 \\ b &= 2m \cdot n \\ c &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

è immediato verificare che

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Terne Pitagoriche

Proviamo a vedere meglio il significato del Teorema di Pitagora, così come fu dimostrato da Diofanto nell'*Arithmetica*: siano $m, n \in \mathbb{Z}$. Definiamo:

$$\begin{aligned} a &= m^2 - n^2 \\ b &= 2m \cdot n \\ c &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

è immediato verificare che

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ a^2 + b^2 &= m^4 - 2m^2 \cdot n^2 + n^4 + 4m^2 \cdot n^2 \end{aligned}$$

Proviamo a vedere meglio il significato del Teorema di Pitagora, così come fu dimostrato da Diofanto nell'*Arithmetica*: siano $m, n \in \mathbb{Z}$. Definiamo:

$$\begin{aligned} a &= m^2 - n^2 \\ b &= 2m \cdot n \\ c &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

è immediato verificare che

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ a^2 + b^2 &= m^4 - 2m^2 \cdot n^2 + n^4 + 4m^2 \cdot n^2 \\ &= m^4 + 2m^2 \cdot n^2 + n^4 \end{aligned}$$

Proviamo a vedere meglio il significato del Teorema di Pitagora, così come fu dimostrato da Diofanto nell'*Arithmetica*: siano $m, n \in \mathbb{Z}$. Definiamo:

$$\begin{aligned} a &= m^2 - n^2 \\ b &= 2m \cdot n \\ c &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

è immediato verificare che

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ a^2 + b^2 &= m^4 - 2m^2 \cdot n^2 + n^4 + 4m^2 \cdot n^2 \\ &= m^4 + 2m^2 \cdot n^2 + n^4 \\ c^2 &= m^4 + 2m^2 \cdot n^2 + n^4 \end{aligned}$$

Le tre formule ci danno tutte le possibili Terne Pitagoriche?

Le tre formule ci danno tutte le possibili Terne Pitagoriche?

Osservazione:

> *data una terna* (a, b, c), *anche la terna* $(k \cdot a, k \cdot b, k \cdot c)$ *è una terna pitagorica.*

Le tre formule ci danno tutte le possibili Terne Pitagoriche?
Osservazione:

> *data una terna* (a, b, c)*, anche la terna* $(k \cdot a, k \cdot b, k \cdot c)$ *è una terna pitagorica.*

Ma noi cerchiamo quelle ceh si dicono *Terne Primitive*, quelle formate da una coppia (a, b) il cui M.C.D. è 1 (e per cui anche (m, n) sono co-primi!).

Le tre formule ci danno tutte le possibili Terne Pitagoriche?
Osservazione:

> *data una terna* (a, b, c)*, anche la terna* $(k \cdot a, k \cdot b, k \cdot c)$ *è una terna pitagorica.*

Ma noi cerchiamo quelle ceh si dicono *Terne Primitive*, quelle formate da una coppia (a, b) il cui M.C.D. è 1 (e per cui anche (m, n) sono co-primi!).
Le altre si possono trovare moltiplicando!

Scegliamo m, n tali per cui $n = m - 1$

Scegliamo m, n tali per cui $n = m - 1$ e quindi $b = c - 1$.

Scegliamo m, n tali per cui $n = m - 1$ e quindi $b = c - 1$.
Infatti

$$a = m^2 - (m-1)^2$$

Scegliamo m, n tali per cui $n = m - 1$ e quindi $b = c - 1$.
Infatti

$$\begin{aligned} a &= m^2 - (m-1)^2 \\ &= m^2 - m^2 + 2m + 1 \end{aligned}$$

Scegliamo m, n tali per cui $n = m - 1$ e quindi $b = c - 1$.
Infatti

$$\begin{aligned} a &= m^2 - (m-1)^2 \\ &= m^2 - m^2 + 2m + 1 \\ b &= 2m \cdot (m-1) \end{aligned}$$

Scegliamo m, n tali per cui $n = m - 1$ e quindi $b = c - 1$.
Infatti

$$\begin{aligned} a &= m^2 - (m-1)^2 \\ &= m^2 - m^2 + 2m + 1 \\ b &= 2m \cdot (m-1) \\ &= 2m^2 - 2m \end{aligned}$$

Scegliamo m, n tali per cui $n = m - 1$ e quindi $b = c - 1$.
Infatti

$$\begin{aligned} a &= m^2 - (m-1)^2 \\ &= m^2 - m^2 + 2m + 1 \\ b &= 2m \cdot (m-1) \\ &= 2m^2 - 2m \\ c &= m^2 + (m-1)^2 \end{aligned}$$

Terne Pitagoriche

Scegliamo m, n tali per cui $n = m - 1$ e quindi $b = c - 1$. Infatti

$$
\begin{aligned}
a &= m^2 - (m-1)^2 \\
&= m^2 - m^2 + 2m + 1 \\
b &= 2m \cdot (m-1) \\
&= 2m^2 - 2m \\
c &= m^2 + (m-1)^2 \\
&= 2m^2 - 2m + 1
\end{aligned}
$$

Scegliamo m, n tali per cui $n = m - 1$ e quindi $b = c - 1$.
Infatti

$$
\begin{aligned}
a &= m^2 - (m-1)^2 \\
&= m^2 - m^2 + 2m + 1 \\
b &= 2m \cdot (m-1) \\
&= 2m^2 - 2m \\
c &= m^2 + (m-1)^2 \\
&= 2m^2 - 2m + 1
\end{aligned}
$$

Se guardiamo bene le terne $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$ sono generate rispettivamente dalle coppie $(1, 2)$ e $(2, 3)$

1. Adesso, invece, scegliamo m qualsiasi e n necessariamente uguale a 1.

1. Adesso, invece, scegliamo m qualsiasi e n necessariamente uguale a 1.
   Otterremo le terne in cui la differenza fra il numero che rappresenta l'ipotenusa e quello del cateto maggiore, sarà 2.

1. Adesso, invece, scegliamo m qualsiasi e n necessariamente uguale a 1.
   Otterremo le terne in cui la differenza fra il numero che rappresenta l'ipotenusa e quello del cateto maggiore, sarà 2.
   Esempio: con $m = 2$ otterremo la terna $(12, 35, 37)$.

1. Adesso, invece, scegliamo m qualsiasi e n necessariamente uguale a 1.
   Otterremo le terne in cui la differenza fra il numero che rappresenta l'ipotenusa e quello del cateto maggiore, sarà 2.
   Esempio: con $m = 2$ otterremo la terna $(12, 35, 37)$.
2. **In generale**, la differenza fra il numero più grande e quello più piccolo della terna è uguale al quadrato della differenza fra i due numeri generatori.

1. Adesso, invece, scegliamo m qualsiasi e n necessariamente uguale a 1.
   Otterremo le terne in cui la differenza fra il numero che rappresenta l'ipotenusa e quello del cateto maggiore, sarà 2.
   Esempio: con $m = 2$ otterremo la terna $(12, 35, 37)$.
2. **In generale**, la differenza fra il numero più grande e quello più piccolo della terna è uguale al quadrato della differenza fra i due numeri generatori.
   Ad esempio, con $m = 5$ e $n = 2$ abbiamo la terna $(20, 21e29)$: la differenza fra i due numeri generatori, m e n, è 3 e la differenza fra i due numeri è 29 - 20 $= 9$.

Esercizio

Dalle terne passiamo alle quaterne pitagoriche:

Esercizio

Dalle terne passiamo alle quaterne pitagoriche:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Esercizio

Dalle terne passiamo alle quaterne pitagoriche:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Esempio: $(3, 4, 12, 13)$

Esercizio

Dalle terne passiamo alle quaterne pitagoriche:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Esempio: $(3, 4, 12, 13)$ Provate!

Bibliografia

Courant-Robbins: "*Che cos'è la Matematica?*", Universale Scientifica Boringhieri

Bibliografia

Courant-Robbins: "*Che cos'è la Matematica?*", Universale Scientifica Boringhieri

Carl B.Boyer:"*Storia della Matematica*", Oscar Saggi Mondadori

Bibliografia

Courant-Robbins: "*Che cos'è la Matematica?*", Universale Scientifica Boringhieri
Carl B.Boyer:"*Storia della Matematica*", Oscar Saggi Mondadori
Maraschini-Palma: "*Conoscenze Matematiche*", Paravia

Bibliografia

Courant-Robbins: "*Che cos'è la Matematica?*", Universale Scientifica Boringhieri

Carl B.Boyer:"*Storia della Matematica*", Oscar Saggi Mondadori

Maraschini-Palma: "*Conoscenze Matematiche*", Paravia

Claudio Bartocci (a cura di): "*Raconti Matematici*", Einaudi

Bibliografia

Courant-Robbins: "*Che cos'è la Matematica?*", Universale Scientifica Boringhieri
Carl B.Boyer:"*Storia della Matematica*", Oscar Saggi Mondadori
Maraschini-Palma: "*Conoscenze Matematiche*", Paravia
Claudio Bartocci (a cura di): "*Raconti Matematici*", Einaudi
AA.VV.: "La Garzantina delle Scienze", Ed. garzanti

Bibliografia

Courant-Robbins: "*Che cos'è la Matematica?*", Universale Scientifica Boringhieri

Carl B.Boyer:"*Storia della Matematica*", Oscar Saggi Mondadori

Maraschini-Palma: "*Conoscenze Matematiche*", Paravia

Claudio Bartocci (a cura di): "*Raconti Matematici*", Einaudi

AA.VV.: "La Garzantina delle Scienze", Ed. garzanti

Susan Sontag: "Sulla Fotografia", Ed. Einaudi