La matematica nell'arte di Escher

geometria, metamorfosi e percezione

Enrico Gregorio

11 febbraio 2011

La prospettiva è una tecnica pittorica che si sviluppa lentamente

La prospettiva è una tecnica pittorica che si sviluppa lentamente
Possiamo vedere Giotto, nella cappella degli Scrovegni:

La prospettiva è una tecnica pittorica che si sviluppa lentamente
Possiamo vedere Giotto, nella cappella degli Scrovegni:

Forse non il primo a usarla consapevolmente, di sicuro Piero della Francesca fu il primo a trattarla matematicamente

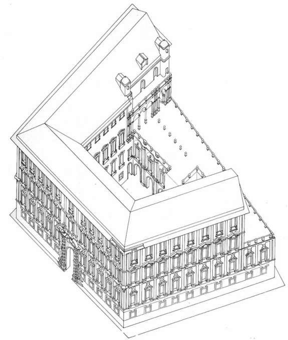
Forse non il primo a usarla consapevolmente, di sicuro Piero della Francesca fu il primo a trattarla matematicamente

Forse non il primo a usarla consapevolmente, di sicuro Piero della Francesca fu il primo a trattarla matematicamente

La prospettiva non è dunque essenziale perché il nostro cervello possa riconoscere un'immagine

La prospettiva non è dunque essenziale perché il nostro cervello possa riconoscere un'immagine
Possiamo infatti riconoscere l'ambientazione nello spazio anche con un'assonometria

La prospettiva non è dunque essenziale perché il nostro cervello possa riconoscere un'immagine
Possiamo infatti riconoscere l'ambientazione nello spazio anche con un'assonometria

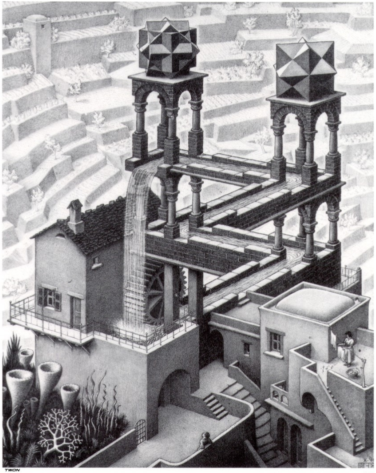


Escher sfrutta abilmente la nostra percezione delle immagini

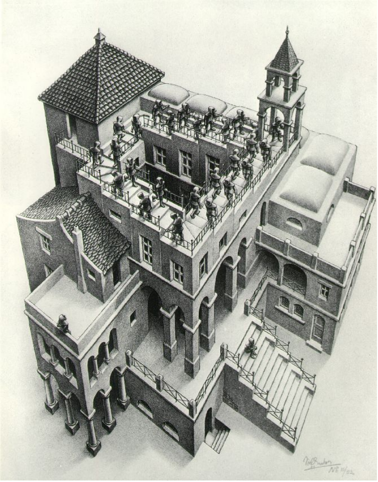
Escher sfrutta abilmente la nostra percezione delle immagini

Escher sfrutta abilmente la nostra percezione delle immagini

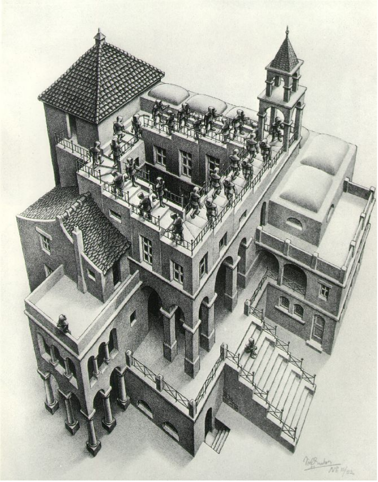
Escher sfrutta abilmente la nostra percezione delle immagini



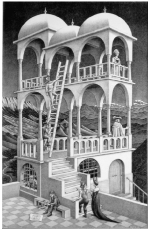
Escher sfrutta abilmente la nostra percezione delle immagini

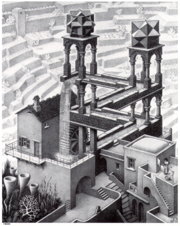


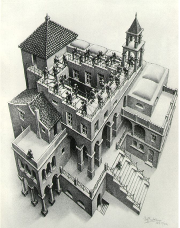
Escher sfrutta abilmente la nostra percezione delle immagini



per ingannarci







Tutti sappiamo ricoprire il piano con esagoni

Tutti sappiamo ricoprire il piano con esagoni
Lo sanno fare perfino le api:

Tutti sappiamo ricoprire il piano con esagoni
Lo sanno fare perfino le api: l'esagono è il poligono regolare con il massimo numero di lati con cui si possa ricoprire il piano

Tutti sappiamo ricoprire il piano con esagoni

Lo sanno fare perfino le api: l'esagono è il poligono regolare con il massimo numero di lati con cui si possa ricoprire il piano

Perciò il ricoprimento con esagoni è il modo più efficiente per avere celle di volume massimo con minimo dispendio di materiale per costruire le pareti

Naturalmente si può ricoprire il piano in molti modi *regolari*

Naturalmente si può ricoprire il piano in molti modi *regolari*
Escher usa questo tipo di ricoprimenti in molte opere

Naturalmente si può ricoprire il piano in molti modi *regolari*
Escher usa questo tipo di ricoprimenti in molte opere

Naturalmente si può ricoprire il piano in molti modi *regolari*
Escher usa questo tipo di ricoprimenti in molte opere

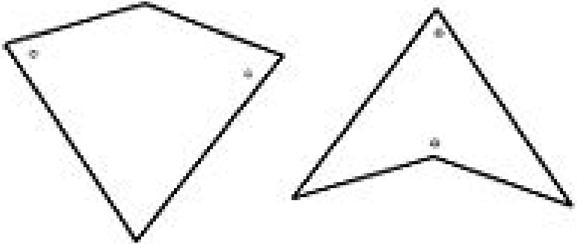
Naturalmente si può ricoprire il piano in molti modi *regolari*
Escher usa questo tipo di ricoprimenti in molte opere

magari con variazioni

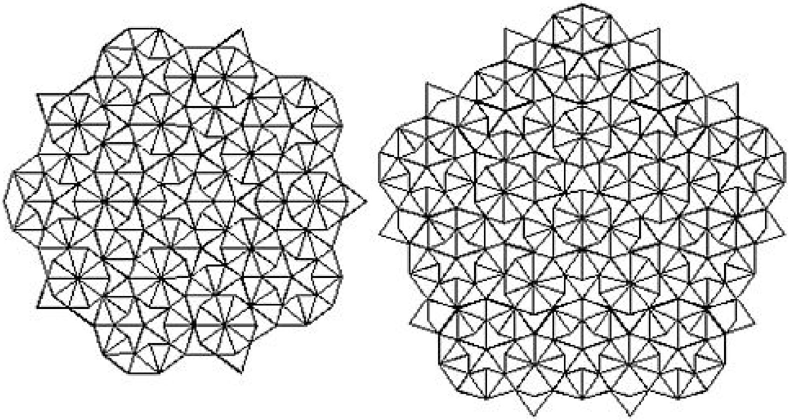
È però possibile ricoprire il piano in modo *aperiodico*

È però possibile ricoprire il piano in modo *aperiodico*
Penrose scoprì come costruire un ricoprimento di questo tipo usando due figure particolari

È però possibile ricoprire il piano in modo *aperiodico*
Penrose scoprì come costruire un ricoprimento di questo tipo usando due figure particolari



Ricoprimenti di Penrose



Ricoprimenti di Escher

Un ricoprimento è periodico se ammette movimenti rigidi del piano che lo trasformino in sé stesso

Un ricoprimento è periodico se ammette movimenti rigidi del piano che lo trasformino in sé stesso
Se vogliamo che sia formato da poligoni regolari uguali ne otteniamo tre:

Un ricoprimento è periodico se ammette movimenti rigidi del piano che lo trasformino in sé stesso
Se vogliamo che sia formato da poligoni regolari uguali ne otteniamo tre:
con triangoli, quadrati o esagoni
Con poligoni regolari anche diversi, ne sono possibili molti

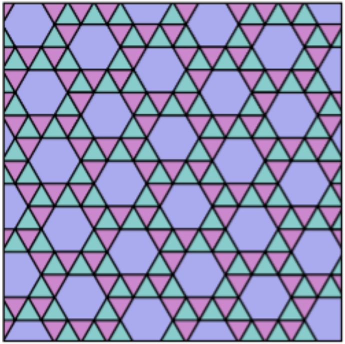
Un ricoprimento è periodico se ammette movimenti rigidi del piano che lo trasformino in sé stesso
Se vogliamo che sia formato da poligoni regolari uguali ne otteniamo tre:
con triangoli, quadrati o esagoni
Con poligoni regolari anche diversi, ne sono possibili molti

Un ricoprimento è periodico se ammette movimenti rigidi del piano che lo trasformino in sé stesso

Se vogliamo che sia formato da poligoni regolari uguali ne otteniamo tre:

con triangoli, quadrati o esagoni

Con poligoni regolari anche diversi, ne sono possibili molti

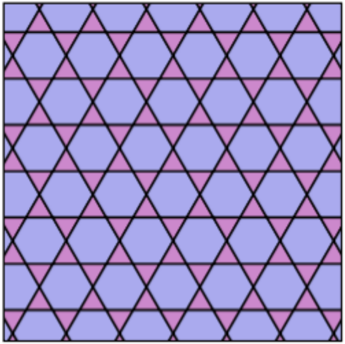


Un ricoprimento è periodico se ammette movimenti rigidi del piano che lo trasformino in sé stesso

Se vogliamo che sia formato da poligoni regolari uguali ne otteniamo tre:

con triangoli, quadrati o esagoni

Con poligoni regolari anche diversi, ne sono possibili molti

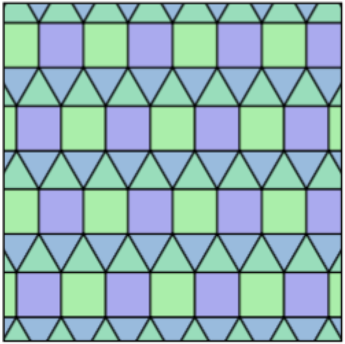


Un ricoprimento è periodico se ammette movimenti rigidi del piano che lo trasformino in sé stesso

Se vogliamo che sia formato da poligoni regolari uguali ne otteniamo tre:

con triangoli, quadrati o esagoni

Con poligoni regolari anche diversi, ne sono possibili molti

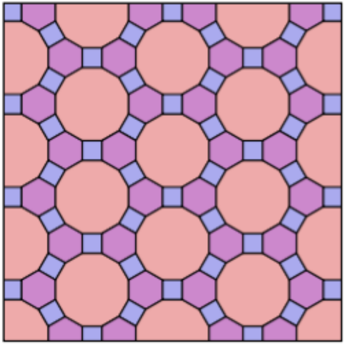


Un ricoprimento è periodico se ammette movimenti rigidi del piano che lo trasformino in sé stesso

Se vogliamo che sia formato da poligoni regolari uguali ne otteniamo tre:

con triangoli, quadrati o esagoni

Con poligoni regolari anche diversi, ne sono possibili molti



Ma se cambiamo spazio?

Ma se cambiamo spazio?
1830: Lobačevskij

Ma se cambiamo spazio?
1830: Lobačevskij
1832: Bolyai

Ma se cambiamo spazio?
1830: Lobačevskij
1832: Bolyai
Prima ancora:

Ma se cambiamo spazio?
1830: Lobačevskij
1832: Bolyai
Prima ancora: Gauss

Ma se cambiamo spazio?

1830: Lobačevskij

1832: Bolyai

Prima ancora: Gauss

Da oltre duemila anni rimaneva aperto il problema se il postulato delle parallele di Euclide fosse o no dimostrabile a partire dagli altri

Ma se cambiamo spazio?
1830: Lobačevskij
1832: Bolyai
Prima ancora: Gauss
Da oltre duemila anni rimaneva aperto il problema se il postulato delle parallele di Euclide fosse o no dimostrabile a partire dagli altri
Lobačevskij e Bolyai studiarono il sistema geometrico che si ottiene *negando* l'unicità della parallela

Ma se cambiamo spazio?

1830: Lobačevskij

1832: Bolyai

Prima ancora: Gauss

Da oltre duemila anni rimaneva aperto il problema se il postulato delle parallele di Euclide fosse o no dimostrabile a partire dagli altri

Lobačevskij e Bolyai studiarono il sistema geometrico che si ottiene *negando* l'unicità della parallela

Il sistema ottenuto appariva privo di contraddizioni,

Ma se cambiamo spazio?

1830: Lobačevskij

1832: Bolyai

Prima ancora: Gauss

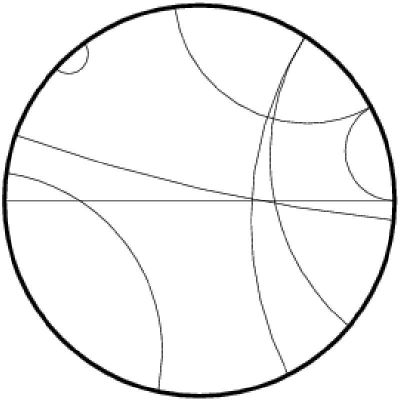
Da oltre duemila anni rimaneva aperto il problema se il postulato delle parallele di Euclide fosse o no dimostrabile a partire dagli altri

Lobačevskij e Bolyai studiarono il sistema geometrico che si ottiene *negando* l'unicità della parallela

Il sistema ottenuto appariva privo di contraddizioni, ma è davvero così?

Poincaré ideò un metodo formidabile per dimostrare che la geometria non euclidea *è coerente*, cioè non conduce a contraddizioni

Poincaré ideò un metodo formidabile per dimostrare che la geometria non euclidea *è coerente*, cioè non conduce a contraddizioni



Che cos'è un punto? Che cos'è una retta?

Che cos’è un punto? Che cos’è una retta?
Con il modello di Poincaré possiamo renderci finalmente conto che

Che cos'è un punto? Che cos'è una retta?
Con il modello di Poincaré possiamo renderci finalmente conto che *sono concetti e non oggetti*

Che cos'è un punto? Che cos'è una retta?
Con il modello di Poincaré possiamo renderci finalmente conto che *sono concetti e non oggetti*
La geometria può servire a descrivere lo spazio in cui ci troviamo

Che cos'è un punto? Che cos'è una retta?

Con il modello di Poincaré possiamo renderci finalmente conto che *sono concetti e non oggetti*

La geometria può servire a descrivere lo spazio in cui ci troviamo *ma non è un'intuizione a priori*

Che cos'è un punto? Che cos'è una retta?
Con il modello di Poincaré possiamo renderci finalmente conto che *sono concetti e non oggetti*
La geometria può servire a descrivere lo spazio in cui ci troviamo *ma non è un'intuizione a priori* con buona pace di Kant

Che cos'è un punto? Che cos'è una retta?
Con il modello di Poincaré possiamo renderci finalmente conto che *sono concetti e non oggetti*
La geometria può servire a descrivere lo spazio in cui ci troviamo *ma non è un'intuizione a priori* con buona pace di Kant
La geometria euclidea è una teoria matematica, che può essere usata per descrivere lo spazio fisico,

Che cos'è un punto? Che cos'è una retta?

Con il modello di Poincaré possiamo renderci finalmente conto che *sono concetti e non oggetti*

La geometria può servire a descrivere lo spazio in cui ci troviamo *ma non è un'intuizione a priori* con buona pace di Kant

La geometria euclidea è una teoria matematica, che può essere usata per descrivere lo spazio fisico, ma non è necessariamente l'unico modo valido per descriverlo

Che cos'è un punto? Che cos'è una retta?

Con il modello di Poincaré possiamo renderci finalmente conto che *sono concetti e non oggetti*

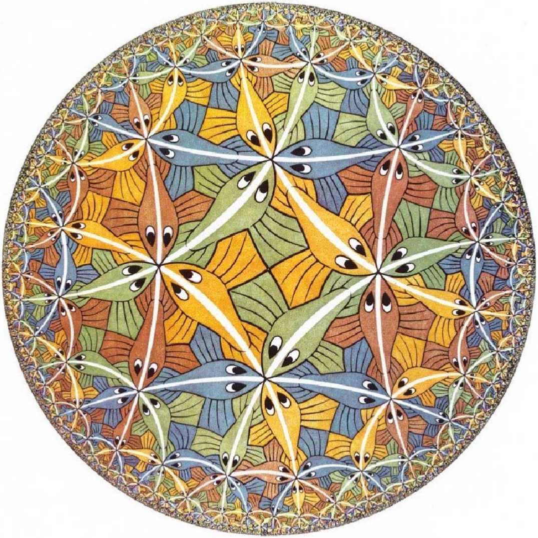
La geometria può servire a descrivere lo spazio in cui ci troviamo *ma non è un'intuizione a priori* con buona pace di Kant

La geometria euclidea è una teoria matematica, che può essere usata per descrivere lo spazio fisico, ma non è necessariamente l'unico modo valido per descriverlo

Per esempio, la relatività generale non usa di certo la geometria euclidea

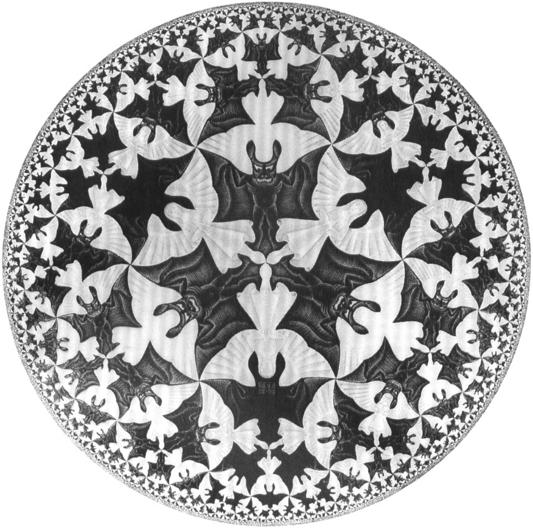
Escher ci *mostra* che cosa si può fare in geometria non euclidea

Escher ci *mostra* che cosa si può fare in geometria non euclidea
Un ricoprimento del piano non euclideo con quadrati e triangoli

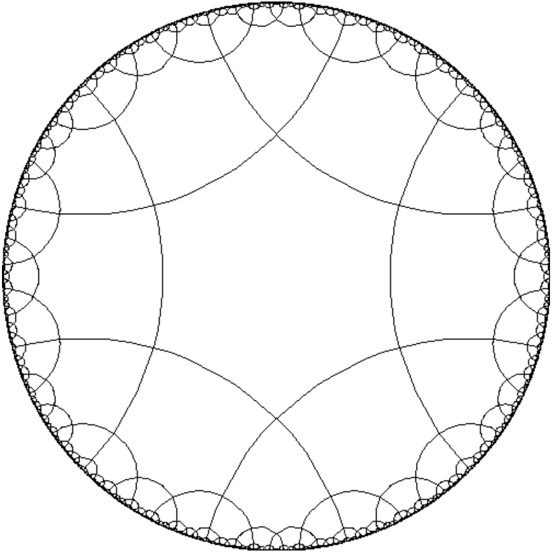


Ricoprimento del piano non euclideo con esagoni (a quattro a quattro!)

Ricoprimento del piano non euclideo con esagoni (a quattro a quattro!)



Ricoprimento del piano non euclideo con esagoni (a quattro a quattro!)



E adesso procediamo senza sosta per l’infinito!

E adesso procediamo senza sosta per l'infinito!