8 marzo 2014

Il teorema più bello

(M. Vincoli)

Ci sono diversi modi di onorare la bellezza. Là dove un artista traccerebbe uno schizzo, scriverebbe una poesia o comporrebbe una melodia, lo scienziato immagina una teoria scientifica
(D. Ruelle *Caso e caos*)

Il concetto di bellezza, in matematica e in fisica come nell'arte e nella vita, certamente non è univoco, vi sono però alcuni tratti sui quali è difficile non convergere: ciò che rende esteticamente bella una teoria può essere la sua potenza sintetica, ovvero la capacità di congiungere aspetti anche lontani del reale, oppure la sua simmetria formale, canone estetico per eccellenza, o ancora, la capacità di trascendere l'ambito da cui muove per aprire nuovi, inattesi orizzonti.
Per non rischiare di lasciare il discorso vago, mi limito a menzionare, per il primo caso, uno dei più stupefacenti teoremi dovuti alla genialità di Cantor, matematico tedesco della seconda metà del XIX secolo, in cui dimostra la corrispondenza biunivoca tra i punti di un segmento e quelli dello spazio, ovvero un segmento contiene tanti punti quanti l'intero spazio tridimensionale, con un duplice salto di dimensionalità (non basta dire infinito, gli infiniti non sono tutti uguali…).

Ma non è necessario andare così lontano; pensiamo ad una semplice uguaglianza che spesso è vista soltanto come una notazione alternativa e nulla più, senza pensare agli orizzonti che dischiude:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Nella sua sinteticità contiene tutti i numeri più importanti: due numeri trascendenti, *e*, numero di Eulero (o anche di Nepero), che proviene dall'analisi matematica, base del logaritmo naturale, e π, rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro, numero principe della geometria euclidea; i due numeri naturali più importanti, 1 e 0, elementi neutri delle operazioni aritmetiche fondamentali, *i*, l'unità immaginaria, che introduce all'insieme dei numeri complessi.
Un compendio di matematica in una riga; come non riconoscervi, nella vicinanza di parti apparentemente lontane, la profonda unità del tutto, l'*armonia dell'universo matematico*? significativamente, è stata definita *il gioiello di Eulero*.

Un esempio universalmente riconosciuto di armonia formale in fisica è dato dalle equazioni di Maxwell, ovvero la teoria del campo elettromagnetico, capolavoro di sintesi, simmetria ed eleganza; talmente perfetto che Einstein, davanti alla loro evidente incompatibilità con la meccanica classica, *intuì* prima ancora di *comprendere*, che *non potevano non essere corrette*, e da questa esigenza estetica, riflesso della profonda e misteriosa corrispondenza tra l'ordine della natura e la sua comprensibilità, svilupperà l'idea alla base della teoria della relatività ristretta, ovvero l'invarianza della velocità della luce.

L'elaborazione delle equazioni del campo elettromagnetico suggerisce infatti che la velocità delle onde elettromagnetiche, di cui la luce è un caso particolare, a differenza di ogni altra velocità, non dipenda dal sistema di riferimento, proprietà che Einstein eleva a postulato della relatività. Le equazioni di Maxwell, la cui sistemazione definitiva risale al 1864, circa quarant'anni prima della teoria della relatività (1905), sono pertanto relativisticamente invarianti.
Le equazioni di Maxwell possono essere formulate in vario modo, nell'ambito di formalismi anche lontani; la forma pseudo integrale, che si introduce ordinariamente in un corso liceale, dovuta al linguaggio matematico ancora in formazione, pur mantenendone gli aspetti sintetici, ne offusca semplicità e potenza; un rapido colpo d'occhio ad una forma differenziale basta ad evocarne armonia e suggestione, senza però dimenticare che queste quattro equazioni sintetizzano quanto può dirsi del campo elettromagnetico (ovvero il quinto anno di fisica del vecchio liceo).

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

La storia della fisica insegna che la ricerca della simmetria, o anche della sua *rottura* - termine diventato popolare nella fisica delle particelle - ha portato a fondamentali progressi: pensiamo a come si è risolta la disputa tra i sistemi tolemaico e copernicano, o ancora ai parallelismi onda e corpuscolo, materia e antimateria, elementi chiave della fisica del Novecento.
Si tratta, in fondo, di una ricerca estetica, l'attesa di qualcosa che soddisfi un istintivo desiderio di bellezza da parte del ricercatore; e la natura spesso ha risposto, perché anch'essa, almeno nella mediazione che ne dà la fisica, sembra preferire ciò che è bello.

Nella mia esperienza, la formalizzazione teorica che più di ogni altra rivela l'intima armonia della fisica, che ne mostra l'unitarietà dispiegandone il fascino, quello che potremmo definire in breve *il teorema più bello*, è un teorema a metà tra matematica e fisica, il Teorema di Noether; e forse non a caso questo teorema è dovuto ad una donna, Emily (Emmy) Noether (1882-1935), una fra le poche della storia della matematica.

Emily Noether ha dovuto subire una duplice discriminazione, dapprima come donna che si propose in un ambiente tradizionalmente maschile, quindi come ebrea, nella Germania delle persecuzioni naziste. Tenne per oltre otto anni corsi presso le Università di Erlangen e di Gottinga non pagata e, per un certo tempo, a nome del suo mentore David Hilbert. Ebbe un ruolo importante nello sviluppo delle algebre formali e degli aspetti matematici della teoria della relatività generale. Quando finalmente, con la forza del suo lavoro, riuscì a farsi accogliere dal mondo accademico, arrivarono le leggi persecutorie,

per cui fu costretta ad emigrare negli Stati Uniti (1932), dove morì tre anni dopo.
Chi fosse interessato ad approfondire la sua figura può leggere il ricchissimo articolo di Luisa Bonolis, storica della fisica, in http://www.galileonet.it/articles/4c32e1485fc52b3adf000cba.

Veniamo ora al Teorema di Noether.
Semplificando (e sperando di non banalizzare), il teorema afferma che ad ogni invarianza di un sistema fisico corrisponde un principio di conservazione; il più significativo esempio è dato dalle tre grandi leggi di conservazione della fisica, la conservazione della quantità di moto, del momento angolare e dell'energia, che seguono dalle proprietà più elementari, e per questo fondamentali, dello spazio e del tempo: omogeneità e isotropia.
La dimostrazione del teorema richiede concetti matematici avanzati, il mio obiettivo sarà perciò decisamente più limitato, cercando di mostrare come, in mancanza di tali invarianze, non potrebbero sussistere nemmeno le leggi di conservazione.

Cominciamo con il chiarire, senza pretesa di rigore formale, il significato dei termini.
Innanzitutto, per *invarianza* si intende ogni trasformazione (movimento geometrico o trasformazione formale) che lascia immutata la configurazione di un sistema: un esempio aiuterà a chiarire il concetto.
Consideriamo un corpo omogeneo (dotato di massa) di forma sferica; ruotandolo di un angolo qualunque attorno al suo centro, esso rimarrà identico a se stesso, per cui le sue configurazioni prima e dopo la rotazione non saranno in alcun modo distinguibili; ne segue che anche il campo gravitazionale da esso generato non potrà cambiare in seguito alla rotazione, mantenendo le stesse proprietà di simmetria della sorgente, ovvero una simmetria sferica; il campo sarà pertanto radiale, con il vettore diretto come il raggio, uguale in modulo ad uguale distanza dal centro; se in luogo di una massa considerassimo una carica, il vettore campo potrebbe essere diretto verso il centro o verso l'esterno, senza alterare la simmetria.

Per un semplice esempio non geometrico, pensiamo ad un'equazione del tipo:
$$x^3 - 2xy + y^3 = 0$$
Invariante per lo scambio di variabili x con y; ne segue che se la coppia $(x_0; y_0)$ è soluzione, anche la coppia $(y_0; x_0)$ lo è; la curva rappresentata da tale equazione nel piano cartesiano sarà simmetrica rispetto alla bisettrice del primo quadrante.

Arriviamo dunque alle proprietà invarianti di spazio e tempo e mostriamo come da esse dipendano i principi di conservazione.

Omogeneità dello spazio → conservazione della quantità di moto

Uno spazio è *omogeneo* quando tutti i suoi punti sono equivalenti, ovvero esiste un'*invarianza di traslazione*: ne segue che l'esito di un esperimento non dipende dal punto in cui lo si esegue.

Ovviamente lo spazio di cui si parla è lo spazio vuoto; lo spazio in cui sia presente una massa, che perturba lo spazio producendo un campo gravitazionale, non è più omogeneo.
Per mostrare che l'omogeneità è condizione necessaria per la conservazione della quantità di moto, consideriamo un semplice fenomeno in cui sia implicato tale principio e pensiamo di realizzarlo in uno spazio non omogeneo.
In fig. 1a è rappresentato un corpo di massa M, in quiete, che esplode in due frammenti di massa m_1 e m_2; per la conservazione della quantità di moto si ottiene

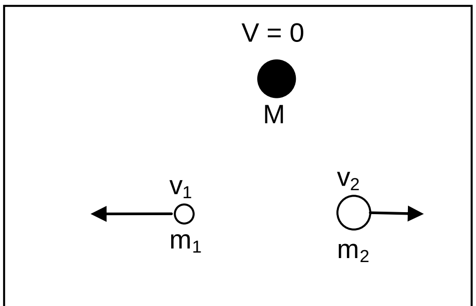

Fig. 1a

$$m_1\boldsymbol{v_1}+m_2\boldsymbol{v_2} = 0$$

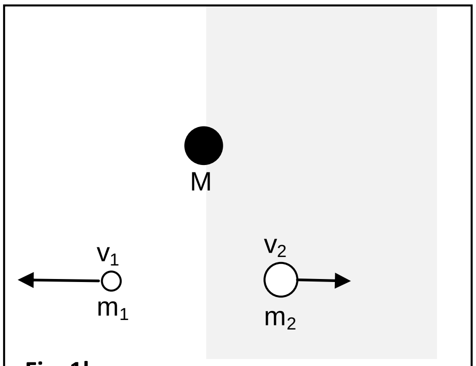

Fig. 1b

La non omogeneità dello spazio, individuata ad esempio dalla parte in grigio nella figura) ove i corpi prendano un'accelerazione, porterebbe ad una immediata violazione del principio di conservazione.
L'alterazione dell'omogeneità dello spazio sarebbe assimilabile, in termini moderni, alla presenza di un campo di forza.

Isotropia dello spazio → conservazione del momento angolare

L'*isotropia* dello spazio implica che tutte le direzioni siano equivalenti (*invarianza di rotazione*); in questo caso lo spazio nel quale sia presente un'unica massa (sferica e omogenea) è ancora isotropo rispetto al centro della sfera: tutte le direzioni che provengono dal centro della sfera sono equivalenti, per cui un corpo che si allontanasse da un centro attrattore avrebbe lo stesso moto in qualunque direzione.
In ogni campo centrale (tra i quali i campi gravitazionale e coulombiano prodotti rispettivamente da masse e cariche puntiformi o comunque sferiche) si conserva il momento angolare.
Ne segue immediatamente un corpo attratto da un centro gravitazionale (es. un pianeta attorno al Sole) può descrivere solo traiettorie piane, ortogonali alla direzione del vettore che ne individua il momento angolare.

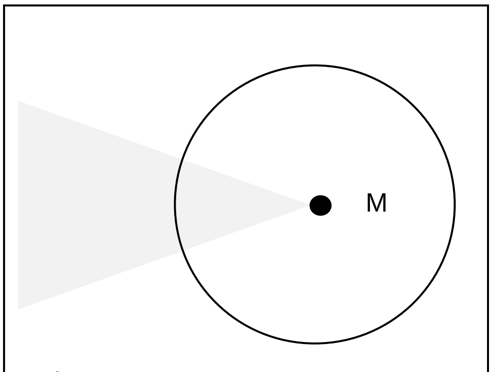

Fig. 2

La mancanza di isotropia comporterebbe l'esistenza di direzioni distinguibili dalle altre, nella figura 2 esemplificate con la zona rappresentata in grigio, dove un corpo risentirebbe un'azione da parte del campo diversa da quella risentita in altre zone equidistanti dal centro, con una conseguente alterazione del moto e l'impossibilità di conservare il momento angolare.

Omogeneità del tempo→ conservazione dell'energia

Omogeneità del tempo significa che il tempo fluisce sempre allo stesso modo, ovvero che *il risultato di un esperimento è indipendente dal momento in cui lo si svolge*; ripetendo oggi le esperienze di Galileo, con i suoi materiali, troveremmo gli stessi valori; naturalmente questo criterio non si applica ai sistemi biologici: correre i cento metri a 20 anni o a 40 non è certo la stessa cosa.
Come tutto ciò che coinvolge il tempo, la sua relazione con la conservazione dell'energia è molto intrigante; anche in questo caso mostriamo che la non omogeneità del tempo, che potremmo rileggere come l'esistenza di un campo non costante nel tempo, invalidi il principio di conservazione dell'energia.

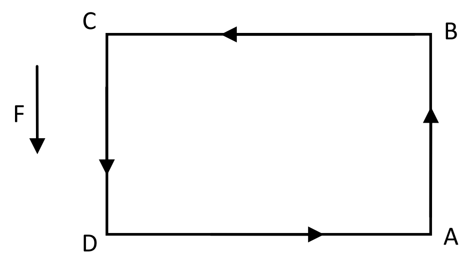

Fig. 3a

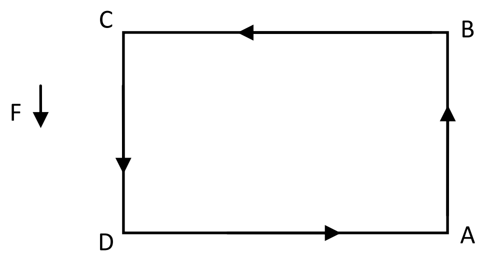

Fig. 3b

Consideriamo un corpo che, partendo da un punto dello spazio, si sposti, seguendo un percorso chiuso, in presenza di un campo esterno che, per semplicità, supporremo uniforme (uguale in tutti i punti dello spazio), come in fig. 3a.
Se il campo svolge su di esso un lavoro complessivamente nullo, diremo che il campo è conservativo; ne deriva la possibilità di definire una funzione scalare, detta energia potenziale, che caratterizza in senso energetico i punti dello spazio; quando un corpo si muove all'interno del campo, converte parte della sua energia cinetica, dipendente dal suo stato di moto, in energia potenziale, legata alla sua posizione, e viceversa, ma la somma delle due resta costante.

Ammettiamo ora che il campo vari nel tempo: ciò rompe l'invarianza temporale in quanto eseguire lo spostamento lungo il segmento AB in due istanti in cui il campo assume valore diverso richiede un differente apporto energetico (l'esperimento svolto in momenti diversi dà risultati diversi, in contrasto con l'assunzione iniziale).
Allora, spostando il corpo lungo AB, in direzione opposta al campo, quando questo è debole (fig. 3b) e lungo CD quando ha intensità maggiore, fa sì che il corpo, in un percorso chiuso, aumenti la propria energia, violando così il principio di conservazione.