LICEO SCIENTIFICO STATALE
GALILEO GALILEI
VERONA

APPUNTI DI RELATIVITA' RISTRETTA
(*prof. Paolo Gini*)

CORSO DI FORMAZIONE PER DOCENTI SULLA FISICA MODERNA
Anno Scolastico 2016 - 2017

CAPITOLO 1: CINEMATICA RELATIVISTICA

Motivi dell'introduzione della Relatività Ristretta

1. Le leggi dell'elettromagnetismo

Il Principio di Relatività Galileiana afferma: **le leggi della meccanica hanno la stessa forma in ogni sistema di riferimento inerziale** (cioè è impossibile eseguire esperimenti meccanici all'interno di un sistema inerziale che permettano di rilevare il suo stato di moto rettilineo uniforme). Ad esempio è facile mostrare che le leggi della dinamica sono uguali in tutti i riferimenti inerziali.
Quando entrano in gioco i fenomeni elettromagnetici, è necessario introdurre le Equazioni di Maxwell per descriverli. Si può dimostrare che **le equazioni di Maxwell cambiano forma se si passa da un riferimento inerziale ad un altro** (non sono invarianti).
Anche senza procedere ad una dimostrazione formale (che richiede l'utilizzo delle equazioni in forma differenziale) è semplice comprendere che le Equazioni di Maxwell non sono invarianti rispetto alle Trasformazioni di Galilei (che formalizzano la relatività galileiana).
Infatti le equazioni di Maxwell contengono (sia nella forma integrale che nella forma differenziale) il termine $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ che rappresenta la velocità con cui le soluzioni delle equazioni - le onde elettromagnetiche (ossia la luce) - si propagano nel vuoto. Se si considera un sistema di riferimento inerziale in cui la velocità della luce sia c (e quindi in cui valgano le Equazioni di Maxwell nella forma standard) e si applicano le trasformazioni di Galilei la velocità della luce cambia e quindi cambia la forma delle equazioni di Maxwell.

2. L'etere e l'esperimento di Michelson e Morley

Inizialmente i fisici interpretarono la situazione ipotizzando l'esistenza di un **sistema di riferimento inerziale privilegiato**, chiamato <u>*etere*</u>, nel quale la luce viaggia con la velocità $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ e nel quale le equazioni di Maxwell sono valide nella forma standard (l'etere appariva comunque come un mezzo dalle proprietà estremamente bizzarre, doveva essere estremamente rigido per permettere alla luce di viaggiare alla velocità elevatissima conosciuta, doveva permeare tutto lo spazio ma anche i materiali trasparenti, non doveva opporre resistenza al moto dei corpi celesti...).

Se la luce viaggia nell'etere con velocità c e se valgono le trasformazioni di Galilei, dovrebbe essere possibile misurare per la luce una velocità diversa in un sistema di riferimento in moto rispetto all'etere (a patto di avere un sistema in moto con velocità sufficientemente elevata); l'esperimento di Michelson e Morley ebbe come obiettivo quello di determinare questa teorica variazione di velocità usando come rifermento in moto la Terra.

2.1. L’esperimento di Michelson – Morley

Supponiamo che la velocità della luce rispetto all'etere sia $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$. La Terra si muove nello spazio ruotando attorno al Sole con una velocità di circa 30 km/s; questa dovrebbe essere anche la velocità rispetto al sistema solidale con l'etere.
Il problema principale da superare per realizzare un esperimento che permetta di misurare la differenza prevista dalle leggi di Galilei, consiste nel fatto che la velocità della Terra è molto piccola rispetto a *c* (circa 10^4 volte inferiore); per risolvere il problema Michelson e Morley utilizzarono un procedimento di tipo interferometrico.

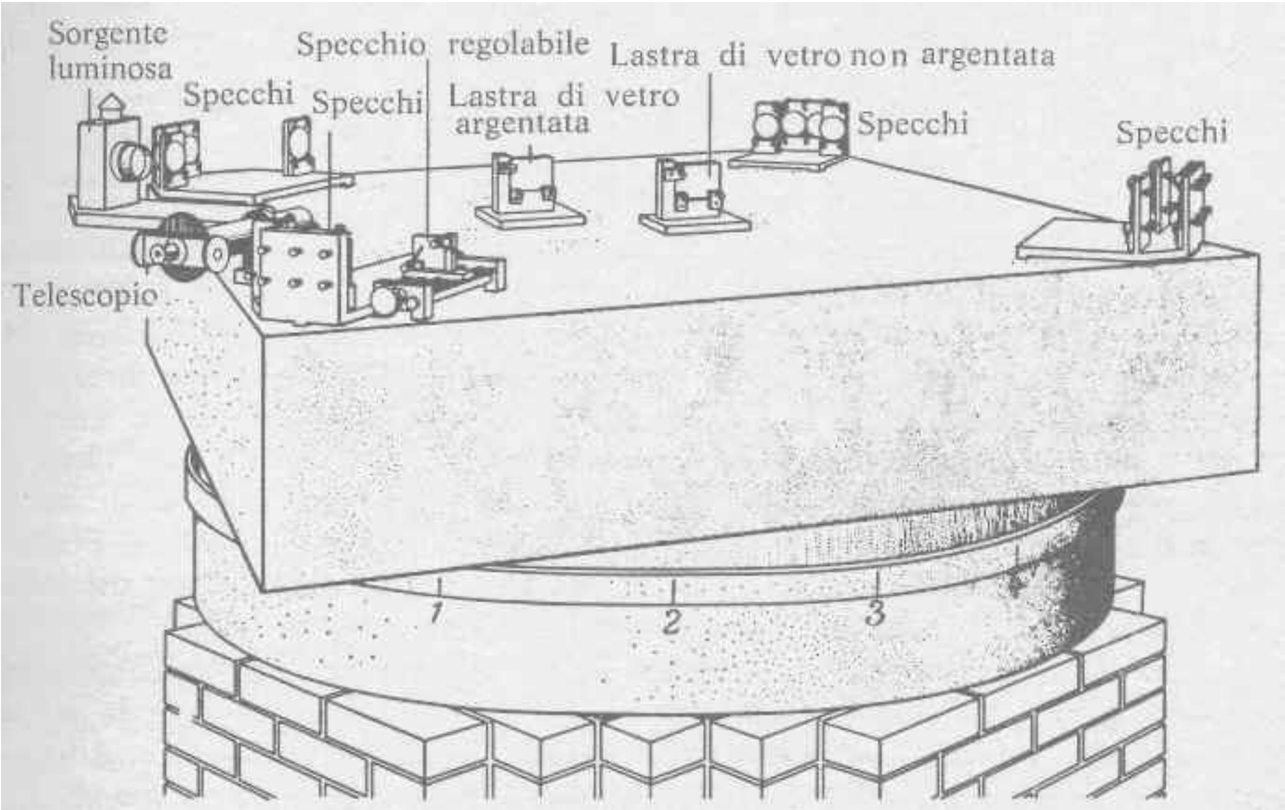


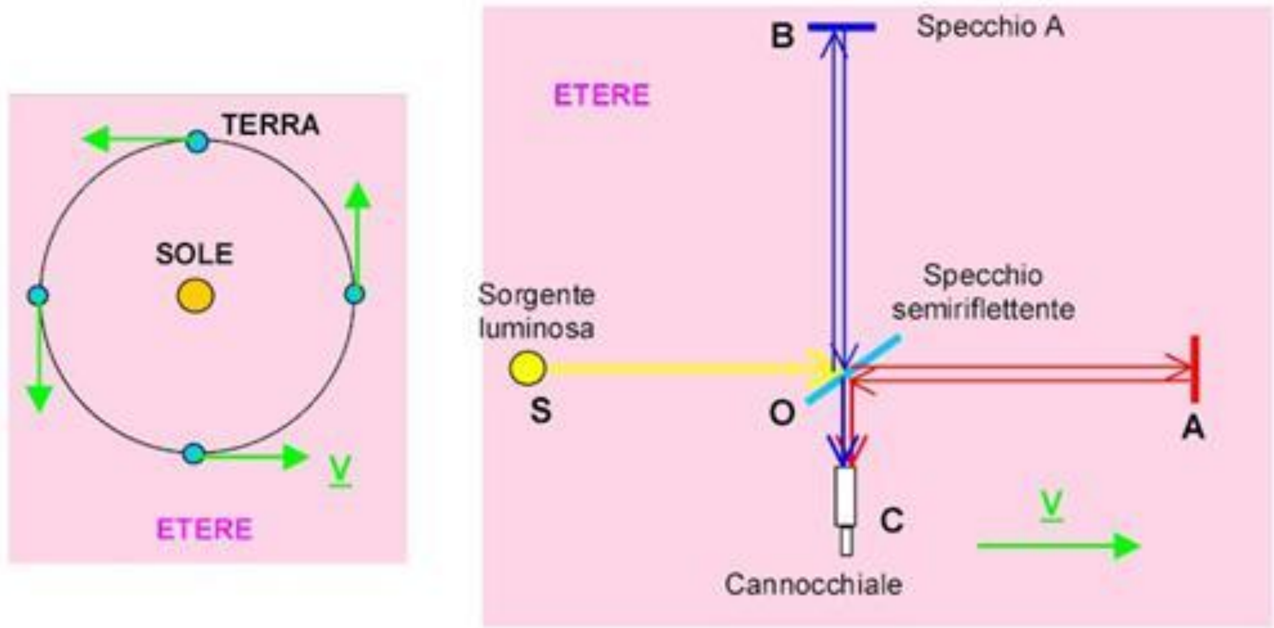
Figura 1 - Apparato di Michelson

Si invia da una sorgente un raggio luminoso monocromatico che viene diviso (mediante uno specchio semiriflettente) in due raggi che si muovono in direzioni perpendicolari: un raggio in direzione perpendicolare al moto della Terra, l’altro in direzione parallela. I due raggi, dopo aver percorso nel laboratorio ognuno una distanza *d*, colpiscono due specchi e sono riflessi. I due raggi si sovrappongono su di uno schermo e interferiscono producendo le caratteristiche frange, segnale del fatto che, dopo il percorso effettuato, i due raggi non sono più in fase.

La differenza di fase può avere due cause diverse:

- Per quanto accurata sia la costruzione dell’apparato sperimentale, le distanze *d* percorse dai due raggi non possono essere esattamente uguali a meno di una lunghezza d’onda (circa 10^{-6} m);
- Se vale la legge di composizione delle velocità di Galilei, allora i due raggi che viaggiano parallelamente e perpendicolarmente al moto della Terra hanno velocità diverse e quindi impiegano tempi diversi per andare e tornare.

Figura 2



Interferometro di Michelson

Analizziamo la differenza di tempo impiegata dai due raggi per andare dallo specchio semiriflettente (posto in O) ai due specchi posti in A e B e tornare allo specchio in O, supponendo che valgano le Trasformazioni di Galilei.

- Il raggio parallelo al moto della Terra (rispetto all'etere) all'andata viaggia (rispetto al laboratorio) con velocità $c - v_T$, al ritorno con $c + v_T$ (ricordare che nell'etere la velocità è sempre *c*!); quindi impiega, per andare e tornare, un tempo $t_1 = \dfrac{d_1}{c-v} + \dfrac{d_1}{c+v} = \dfrac{2d_1}{c} \cdot \dfrac{1}{1 - v^2/c^2}$
- Per il raggio perpendicolare i calcoli sono leggermente più complessi. Nel sistema del laboratorio il raggio si muove in direzione *y* con velocità v_y ma nel sistema dell'etere il raggio si muove in diagonale <u>con velocità *c*</u> (vedi figura 3)

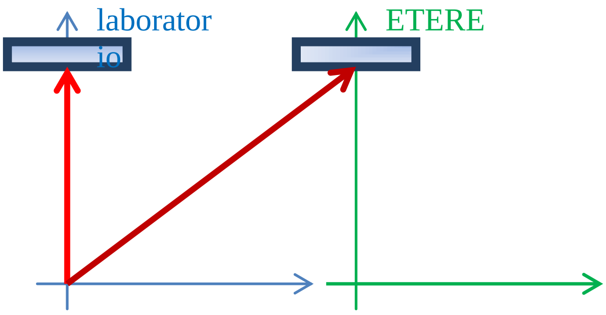


Figura 3

quindi $c^2 = v_T^2 + v_y^2$ da cui si ottiene

$$v_y = \sqrt{c^2 - v_T^2}$$

possiamo ora calcolare il tempo impiegato dal raggio per andare da O a B e ritorno (i moduli della velocità sono uguali all'andata e al ritorno):

$$t_2 = \frac{2d_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2d_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Confrontando i due intervalli di tempo si ha quindi:

$$t_1 = \frac{2d_1}{c} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2} \text{ e } t_2 = \frac{2d_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

I due raggi impiegano tempi diversi per effettuare i percorso e ciò comporta uno sfasamento (lo specchio semiriflettente genera due raggi che inizialmente sono coerenti) che si traduce in un'**interferenza**

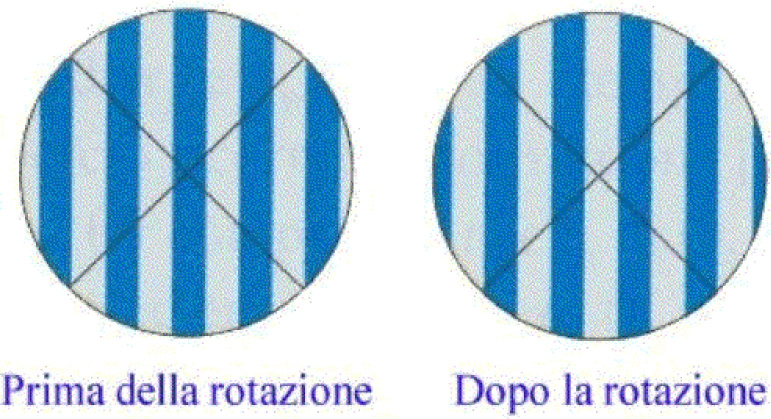


Figura 4 - Frange d'interferenza

Se si fa ruotare l'apparato sperimentale le velocità dei due raggi dovrebbero cambiare in funzione dell'angolo (ad esempio con rotazione di 90°, le velocità dovrebbero scambiarsi) e la figura d'interferenza dovrebbe modificarsi (indipendentemente dal fatto che $d_1 \neq d_2$) in maniera rilevabile dall'apparato sperimentale.

L'esperimento, ripetuto in varie condizioni e con apparati sempre più precisi, non ha mostrato nessuna variazione della figura di interferenza. Quindi la velocità della luce non sembra dipendere dal moto del sistema di riferimento in cui la si misura

2.2. Conclusioni

L'esperienza di Michelson e Morley era stata concepita per dimostrare che la luce può avere velocità diverse per diversi osservatori in moto relativo rispetto all'etere sulla base della presunta validità della composizione galileiana delle velocità.
Il fallimento dell'esperimento portò ad alcuni tentativi di spiegazione che cercavano di salvaguardare l'etere e la legge di composizione delle velocità:

1. La terra è solidale all'etere (è la spiegazione più semplice ma deve essere scartata per ovvi motivi, la Terra diventerebbe un riferimento privilegiato!).
2. La terra trascina parzialmente l'etere, come trascina l'aria e quindi sembra ferma rispetto all'etere: ipotesi smentita da fenomeno *dell'aberrazione stellare* (noto dal 1727) e dall'*esperimento di Fizeau.*
3. Le equazioni di Maxwell sono errate. Questa possibilità, già alla fine del secolo scorso, era da ritenersi inaccettabile, soprattutto per le verifiche sull'esistenza delle onde elettromagnetiche che avevano luogo proprio negli anni dell'esperimento di Michelson-Morley.

4. I corpi si contraggono (contrazione di Lorentz - Fitzgerald) nella direzione del moto relativo all'etere di un fattore $\sqrt{1-v^2/c^2}$ (da notare che la contrazione di Lorentz - Fitzgerald è proprio la legge di contrazione delle lunghezze che si ricava nella Relatività Speciale). Esperimenti eseguiti con interferometri a bracci disuguali smentiscono le previsioni di questa teoria.
5. Il risultato dell'esperimento va preso per quello che è e bisogna rivedere i concetti fisici che abbiamo usato, in particolare si deve accettare che la velocità della luce sia la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

- Gli esperimenti di Michelson - Morley mostrano che la velocità della luce nel vuoto non dipende dal moto della sorgente e/o dell'osservatore (è la stessa sia se la sorgente si avvicina all'osservatore sia se si allontana).
- Le trasformazioni di Galilei implicano che se la luce ha velocità *c* in un riferimento, allora in un altro la velocità sarà diversa (in contrasto con le equazioni Maxwell).

Il Principio di Relatività Galileiano, e le Trasformazioni di Galilei che ne rappresentano la formulazione matematica, devono essere modificati.

3. Problemi di simmetria

Un altro problema (evidenziato da Einstein nell'introduzione al suo articolo) posto dall'elettromagnetismo alla Relatività Galileiana è costituito dalle asimmetrie che compaiono nel caso delle interazioni tra un magnete e un conduttore in moto relativo l'uno rispetto all'altro.

Se si considera un magnete in moto rispetto ad un circuito fermo (rispetto al laboratorio) si osserva nel circuito una corrente; secondo la teoria di Maxwell, nello spazio attorno al magnete si ha un campo magnetico variabile nel tempo e ciò è causa di un campo elettrico indotto al quale può essere associata una densità di energia (spesa per creare questo campo), il campo elettrico produce, nelle porzioni di circuito immerse in esso, una corrente.

Se, invece, si considera un circuito in moto rispetto ad un magnete fermo (rispetto al laboratorio) si osserva comunque nel circuito una corrente ma lo spazio attorno al magnete **non è sede di alcun campo elettrico**, mentre nel circuito è presente una forza elettromotrice (lavoro sull'unità di carica) la cui causa è da ricercarsi nella Forza di Lorentz ($\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$).

Se il moto relativo è lo stesso nei due casi si osservano correnti con lo stesso verso e con la stessa intensità ma con origini diverse il che è non accettabile stante la simmetria della situazione.

Risulta quindi evidente che è necessario ampliare il postulato di Relatività inglobando l'elettromagnetismo.

Le ipotesi di Einstein sulla Relatività

Secondo la relatività galileiana il tempo è assoluto, (scorre nello stesso modo per tutti gli osservatori inerziali), lo spazio è assoluto (la lunghezza di un righello è la stessa per tutti gli osservatori) e le leggi della meccanica sono invarianti per tutti gli osservatori inerziali; di conseguenza si hanno le trasformazioni di Galilei.

4. Ipotesi di Einstein

1) Tutte le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali (non esiste un sistema di riferimento inerziale privilegiato).

2) La velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali e in tutte le direzioni

3) *(Implicita) Lo spazio e il tempo sono omogenei (tutti gli istanti e tutti i punti sono equivalenti), lo spazio è isotropo (tutte le direzioni spaziali sono equivalenti).*

5. Il problema di definire la coordinata temporale (opzionale)

Il primo problema che ci si deve porre è quello di definire esattamente (in modo operativo) cosa si intenda per *tempo*.

La posizione di un punto in quiete rispetto ad un Sistema di Riferimento Inerziale (di seguito S.R.I) può essere determinata mediante un campione di lunghezza rigido (*regolo*) e le regole della geometria, ottenendo le coordinate cartesiane.

Per un punto in movimento servono le coordinate in funzione del tempo ma si deve definire il significato fisico del concetto di coordinata temporale.

Inizialmente noi possiamo definire la coordinata temporale localmente, ossia mediante un orologio (mediante la posizione delle lancette) posto **in quiete** (stazionario) "vicino" al punto in cui avviene l'evento di cui ci occupiamo. Ad esempio affermare "il punto materiale M passa dalla posizione A nell'istante t_0" significherà "il posizionarsi delle lancette (o il display…) dell'orologio posto in A su t_0 e il passaggio di M per A sono simultanei (nel giudizio di un osservatore posto in A!)".

Come facciamo a determinare il tempo in punti lontani dall'orologio? Come facciamo a confrontare i tempi in punti distanti l'uno dall'altro?

Per prima cosa abbiamo bisogno di orologi (tutti identici) in ogni punto dello spazio che misurino il tempo locale (ossia determino il tempo in un intorno di ogni punto) poi dobbiamo stabilire una procedura per *sincronizzarli* (ossia per avere un tempo comune).

5.1. Sincronizzazione degli orologi

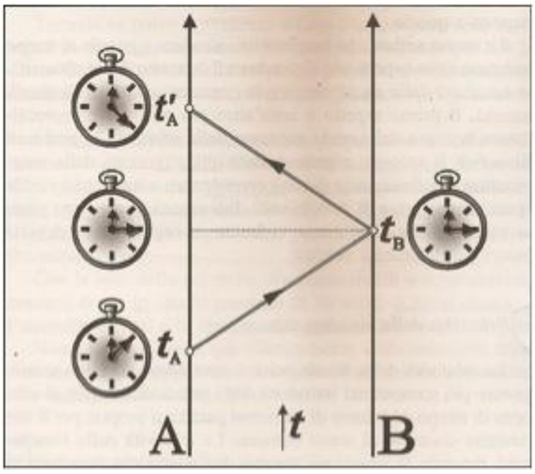
Consideriamo due orologi stazionari identici uno in A e uno in B, ciascuno misura il tempo in un suo intorno; vogliamo stabilire la procedura per arrivare al tempo comune (sincronizzazione).

Si stabilisce per *definizione* che "il tempo impiegato da un raggio di luce per andare da A a B sia uguale al tempo impiegato per andare da B ad A".

Quindi:

- se un raggio di luce parte da A all'istante (misurato dall'orologio in A) t_A, arriva in B e viene riflesso al tempo (misurato dall'orologio B) t_B e arriva in A al tempo t'_A (misurato da A)
- i due orologi sono *sincronizzati* se

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$



- Si suppone che se l'orologio in A è sincronizzato con quello in B allora l'orologio in B è sincronizzato con quello in A
- Si può estendere la procedura a quanti punti si voglia
- Se A è sincronizzato con B e con C allora B e C sono sincronizzati tra loro
- D'ora in poi assoceremo ad ogni punto di un SRI un orologio e tutti saranno sincronizzati
- Il "*tempo*" di un evento sarà quello indicato simultaneamente al verificarsi dell'evento da un orologio stazionario sito nel punto in cui si verifica l'evento e sincronizzato con un ben precisato orologio stazionario

Le conseguenze dei postulati

6. La Dilatazione degli intervalli di tempo

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali S e S' in moto relativo con velocità *v* costante lungo l'asse *x* comune. Per uniformità considereremo "stazionario" *S* e "in moto" *S'*.
Supponiamo che l'osservatore S esegua la misura del tempo che intercorre tra due eventi che si verificano in uno stesso punto del suo sistema di riferimento (ad esempio accende e spegne una lampada, oppure vede passare l'inizio e la fine di una sbarra per l'origine O, oppure vede passare l'inizio e la fine di un percorso), chiamiamo Δt questo intervallo di tempo (tempo proprio).
L'osservatore *S*' (che consideriamo in moto) vedrà avvenire i due eventi in punti diversi del suo sistema di riferimento (ad esempio vedrà la lampada accendersi nel punto A e spegnersi in B).

- Usando le Trasformazioni di Lorentz è semplice dimostrare[1] che **il tempo Δt' misurato da S' è maggiore del tempo Δt** secondo la relazione

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t$$

- Lo stesso risultato si può ottenere mediante l'Orologio a luce"

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t$$

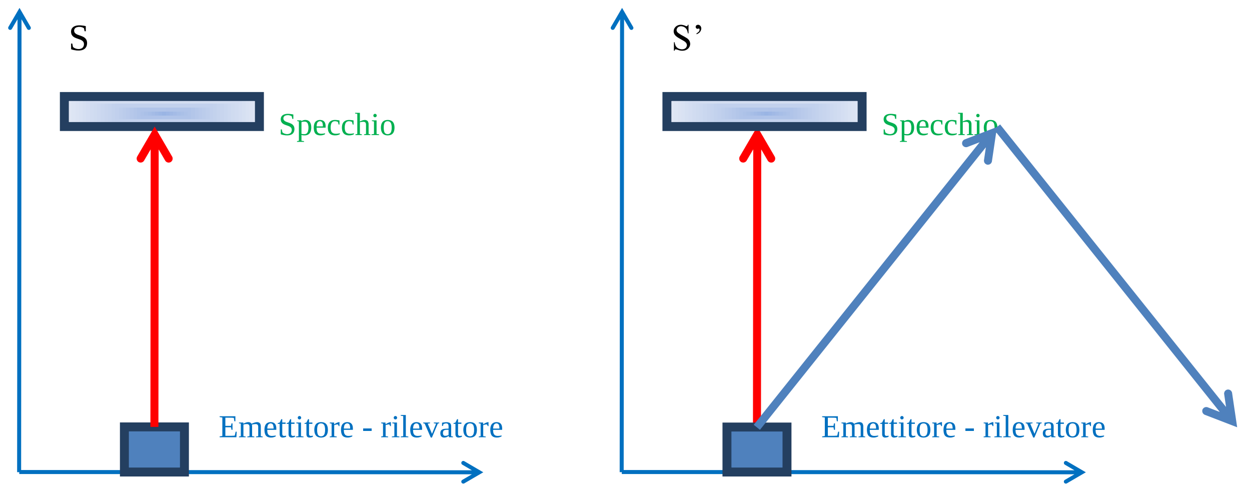
[1] Vedi Appendice A

Nota: il fenomeno è del tutto simmetrico, cioè se S' misura nel proprio riferimento l'intervallo di tempo fra due eventi che dal suo punto di vista avvengono nello stesso punto allora sarà S ad affermare che l'intervallo di tempo è dilatato (in ossequio al principio di relatività, i due osservatori sono sullo stesso piano, nessuno è privilegiato).

6.1. Dimostrazione con orologio a luce

Consideriamo una sorgente che emette luce stazionaria nel sistema di riferimento S. L'impulso emesso colpisce uno specchio (stazionario in S) e viene riflesso tornando alla sorgente e qui viene rilevato.
L'emissione e l'assorbimento avvengono (secondo il sistema S) nello stesso punto A, l'intervallo di tempo Δt (misurato da un orologio stazionario in A) è proprio.

Consideriamo ora un sistema di riferimento S' che veda S in moto con velocità v costante perpendicolare al moto del raggio di luce.



Nel sistema di riferimento S' il raggio di luce compie un percorso obliquo fino allo specchio e poi dallo specchio fino al rilevatore e quindi i due eventi avvengono in punti distinti (i tempi di partenza e arrivo sono misurati comunque da orologi stazionari in S' e sincronizzati tra loro).

In S:

la luce percorre la distanza L due volte (andata e ritorno) con velocità c, quindi il tempo tra l'emissione e l'assorbimento è:

$$\Delta t = \frac{2L}{c}$$

In S':

la luce percorre il tragitto obliquo (due volte, andata e ritorno) con velocità c e utilizzando il Teorema di Pitagora abbiamo $d = \sqrt{L^2 + x^2}$, x rappresenta la distanza di cui si è spostato il sistema di riferimento S rispetto a S' nel tempo (secondo S') impiegato dalla luce ad andare dalla sorgente allo specchio, ossia nel tempo $\Delta t'/2$ (assumendo che il tempo di andata sia uguale a quello di ritorno). Dato che la velocità relativa di S' è v, abbiamo:

$$d = \sqrt{L^2 + \left(v\frac{\Delta t'}{2}\right)^2}$$

Quindi in S' il tempo impiegato dalla luce è:

$$\Delta t' = \frac{2d}{c} = \frac{2\sqrt{L^2 + \frac{v^2(\Delta t')^2}{4}}}{c}$$

Risolviamo l'equazione rispetto a $\Delta t'$

$$\Delta t'^2 = \frac{4L^2 + 4\frac{v^2(\Delta t')^2}{4}}{c^2} \Rightarrow c^2\Delta t'^2 - v^2\Delta t'^2 = 4L^2 \Rightarrow$$

$$\Delta t'^2 = \frac{4L^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow \Delta t' = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta t \qquad \text{CVD}$$

6.2. Applicazioni/Esempi immediati

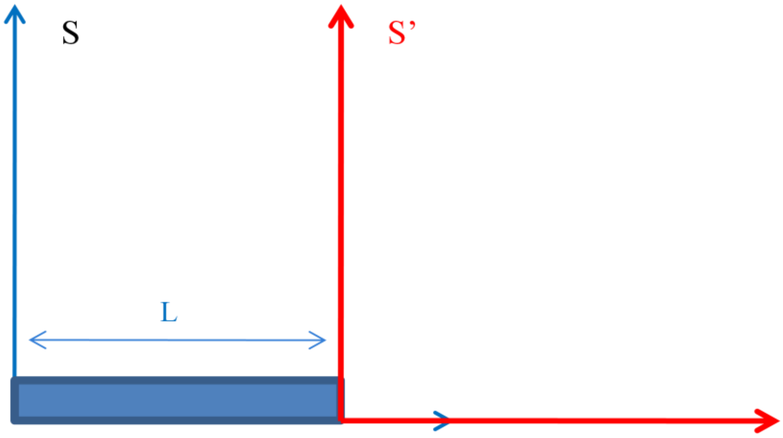
1) Il mesone μ in un sistema di riferimento in cui sia in quiete, cioè che sia solidale con esso, vive un tempo t_0 (tempo proprio); rispetto ad un riferimento in cui appaia in moto la sua vita media appare dilatata e quindi percorre spazi molto maggiori di quanto gli sarebbe concesso.

2) Se consideriamo il percorso dalla terra sino ad Alpha Centauri (circa 4 anni luce), una astronave che viaggi con velocità pari a 0,8 c impiega secondo un osservatore sulla terra un tempo pari a $t' = \frac{s}{v} = \frac{4}{0{,}8}\frac{a.l.}{c} = 5$ anni. Un osservatore sull’astronave vede gli eventi partenza e arrivo avvenire nello stesso punto del suo riferimento, quindi il tempo che misura è proprio ed è dato da

$$t = \frac{t'}{\gamma} = 5 \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}8c)^2}{c^2}} = 5 \cdot \sqrt{1 - 0{,}64} = 5 \times 0{,}6 = 3 \text{ anni}$$

7. La Contrazione delle lunghezze

Come conseguenza immediata della legge sulla dilatazione degli intervalli di tempo possiamo subito dedurre che anche la lunghezza degli oggetti è relativa agli osservatori, cioè non è invariante.
Consideriamo una sbarra rigida (regolo) in quiete nel sistema di riferimento inerziale *S* e posizionata lungo l'asse *x* con un estremo nell'origine. La lunghezza *L* del regolo nel sistema di riferimento *S* è determinata conoscendo la coordinata x_B del secondo estremo.
Supponiamo ora che il riferimento inerziale *S* si muova rispetto al sistema inerziale *S*' con moto rettilineo uniforme lungo la direzione comune agli assi *x* - *x'*.
Come può un osservatore posto nell'origine del sistema *S'* misurare la lunghezza del regolo?
Un possibile metodo consiste nel misurare l'intervallo di tempo impiegato dal regolo per passare davanti all'origine di *S*' (ossia misurare in *S'* l'intervallo di tempo tra gli eventi "l'estremo B passa per *O*'" e "l'estremo A passa per *O*'").



Nel sistema di riferimento *S*' i due eventi avvengono nello stesso punto dello spazio (l'origine) quindi l'intervallo misurato è *proprio*.
Conoscendo l'intervallo di tempo $\Delta t' = \Delta\tau$ e la velocità v con cui si muove S, l'osservatore S' può dedurre la lunghezza L' del regolo $L' = v\Delta t'$.
Utilizziamo la relazione tra intervallo di tempo proprio e improprio $\Delta t = \gamma\Delta t'$ e sostituendo otteniamo

$$L' = v\frac{\Delta t}{\gamma}$$

Però nel sistema di riferimento S il tempo (improprio) Δt è il tempo impiegato dall'origine O' del riferimento S' per passare per i punti $x = x_B$ e $x = x_A = 0$, quindi il prodotto $v\Delta t$ corrisponde alla distanza tra gli estremi del regolo ossia alla sua lunghezza L misurata in S, quindi

$$L' = v\frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{L}{\gamma}$$

dato che $\frac{1}{\gamma} < 1$ <u>la lunghezza del regolo misurata da S'</u> (che vede il regolo in movimento!) <u>appare contratta</u> (ossia diminuita).
La contrazione riguarda solo la dimensione parallela al moto.

Le trasformazioni di Lorentz

Conseguenza immediata dei postulati di Einstein è la necessità di trovare nuove leggi per passare da un sistema inerziale ad un altro.
Consideriamo due sistemi *S* (Oxy) e *S'* (O'x'y'), ci poniamo nel sistema *S* (che chiameremo "stazionario") e osserviamo <u>*S'* che si muove rispetto a *S* lungo l'asse *x*</u> comune con moto rettilineo uniforme a <u>velocità *u*</u>; le coordinate di un evento in *S* saranno (*t, x, y, z*) e in *S*' saranno (*t', x', y', z'*).

Le leggi per trovare le coordinate in S' (in moto) essendo note le coordinate in S (stazionario) sono:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma(x - ut)$$

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)$$

Importante: queste permettono di trovare le coordinate nel sistema in moto note le coordinate in quello stazionario. Se conosciamo le coordinate *x'* e *t'*, nel sistema in moto, per trovare *x* e *t* dobbiamo usare le trasformazioni inverse che si ottengono semplicemente scambiando *u* con –*u*.

Se la velocità con cui si muove S' è molto piccola rispetto a quella della luce (u<<c), il termine γ tende a 1, mentre $\frac{u}{c^2} \to 0$, quindi si ritrovano le Trasformazioni di Galileo che sono un'approssimazione non – relativistica di quelle di Lorentz.

8. Argomenti di plausibilità per le TL

Possiamo decidere di dedurre[2] le trasformazioni di Lorentz o limitarci a fornire degli argomenti di plausibilità che in qualche modo sostengano la scelta di queste trasformazioni.
Alcuni <u>argomenti di plausibilità</u> sono i seguenti:

a) Per *v/c*<<1 le TL (non confondere con il limite in senso matematico) coincidono con le Trasformazioni di Galilei, quindi ritroviamo le trasformazioni di coordinate sulle quali si è basata la fisica sino all'inizio del XX° secolo;
b) Per *v*>*c* le TL portano a risultati appartenenti all'insieme dei numeri complessi, ciò indica che non è possibile superare la velocità della luce nel vuoto (in accordo con gli esperimenti);
c) Dalle TL discendono leggi di trasformazione delle velocità che sono coerenti con il postulato sulla velocità della luce (vedi paragrafo sulle trasformazioni delle velocità e gli esercizi);
d) Le TL «mescolano» coordinate spaziali e temporali in modo *simmetrico* come possiamo osservare con il seguente ragionamento
   Indichiamo con τ il prodotto *ct* (abbiamo così una "coordinata" omogenea a quelle spaziali) e sostituiamo nelle TL:

---

[2] Vedi APPENDICE A

$$x' = \gamma(x - vt) \Rightarrow x' = \gamma\left(x - v\frac{c}{c}t\right) = \gamma\left(x - \frac{v}{c}\tau\right)$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{\tau'}{c} = \gamma\left(\frac{\tau}{c} - \frac{xv}{c^2}\right) \Rightarrow \tau' = \gamma\left(\tau - \frac{v}{c}x\right)$$

Notiamo che le due relazioni che descrivono le trasformazioni delle coordinate x e τ sono perfettamente simmetriche, le due coordinate svolgono lo stesso ruolo.

Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz

9. La Dilatazione dei tempi

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali S e S' in moto relativo con velocità v costante lungo l'asse x comune. Per uniformità considereremo "stazionario" S e "in moto" S'.
Supponiamo che l'osservatore S esegua la misura del tempo che intercorre tra due eventi che si verificano in uno stesso punto del suo sistema di riferimento (ad esempio accende e spegne una lampada, oppure vede passare l'inizio e la fine di una sbarra per l'origine O, oppure vede passare l'inizio e la fine di un percorso), chiamiamo Δt questo tempo (intervallo di tempo proprio).
L'osservatore S' (che consideriamo in moto) vedrà avvenire i due eventi in punti diversi del suo sistema di riferimento (ad esempio vedrà la lampada accendersi nel punto A e spegnersi in B). Usando le Trasformazioni di Lorentz è semplice dimostrare[3] che **il tempo Δt' misurato da S' è maggiore del tempo Δt** secondo la relazione

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t$$

Nota: il fenomeno è del tutto simmetrico, cioè se S' misura nel proprio riferimento l'intervallo di tempo fra due eventi che dal suo punto di vista avvengono nello stesso punto allora sarà S ad affermare che l'intervallo di tempo è dilatato (in ossequio al principio di relatività, i due osservatori sono sullo stesso piano, nessuno è privilegiato).

9.1. Applicazioni

1) Il mesone μ in un sistema di riferimento in cui sia in quiete, cioè che sia solidale con esso, ha una vita media (ossia decade dopo essere stato prodotto) di circa $2{,}197 \cdot 10^{-6}$ s (tempo proprio); rispetto ad un riferimento in cui appaia in moto la sua vita media appare dilatata e quindi percorre spazi molto maggiori di quanto gli sarebbe concesso.

2) Se consideriamo il percorso dalla terra sino ad Alpha Centauri (circa 4 anni luce), una astronave che viaggi con velocità pari a 0,8 c impiega secondo un osservatore sulla terra un tempo pari a $t' = \frac{s}{v} = \frac{4}{0{,}8}\frac{a.l.}{c} = 5$ anni. Un osservatore sull'astronave vede gli eventi partenza e arrivo avvenire nello stesso punto del suo riferimento, quindi il tempo che misura è proprio ed è dato da

$$t = \frac{t'}{\gamma} = 5 \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}8c)^2}{c^2}} = 5 \cdot \sqrt{1 - 0{,}64} = 5 \times 0{,}6 = 3 \text{ anni}$$

[3] Vedi Appendice B

10. Contrazione delle lunghezze

Un'altra importante e sconcertante conseguenza delle trasformazioni di Lorentz è il fenomeno della contrazione delle lunghezze: **se un osservatore S' misura la lunghezza di un corpo che nel suo giudizio si muove con velocità *v*, la lunghezza che misura appare contratta (più corta) rispetto alla lunghezza misurata da un osservatore S che veda il corpo in quiete (fermo) → i corpi appaiono accorciarsi nella direzione in cui si muovono.**

Indicando con Δx la lunghezza misurata da un osservatore S solidale con il corpo (lunghezza propria o lunghezza a riposo) e con Δx' la lunghezza misurata da un osservatore S' che giudichi il corpo da misurare in moto con velocità v (indifferentemente si può pensare che l'oggetto da misurare si muova rispetto a S' o che S' si muova rispetto all'oggetto), utilizzando le trasformazioni di Lorentz è semplice dimostrare che[4]:

$$\Delta x' = \Delta x \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\Delta x}{\gamma}.$$

Nota. Il fenomeno è del tutto simmetrico: se ciascuno dei due osservatori è fornito di un regolo (sbarra), in quiete nel suo riferimento, con lunghezza a riposo di 1 m, ciascun osservatore affermerà che il regolo in quiete nell'altro riferimento (che dal suo punto di vista è in moto) sarà contratto di un fattore $1/\gamma$.

10.1. Applicazioni

Se una particella si muove con velocità pari a 0,8 c in un acceleratore e deve percorrere una distanza di 1 km nel laboratorio, la particella, nel suo riferimento, deve percorrere una distanza inferiore, infatti dal punto di vista di un osservatore solidale con particella è il percorso fra il punto di emissione e il bersaglio a muoversi con velocità pari a – 0,8c, quindi la lunghezza del percorso appare contratta di un fattore $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{0{,}64c^2}{c^2}} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$, perciò secondo la particella il percorso è lungo solo 0,6 km.
Da notare che il risultato ottenuto è in accordo con la dilatazione dei tempi, nel senso che:

1. Secondo S (laboratorio): $\Delta t_S = \frac{\Delta x}{v} = \frac{1}{0{,}8 \cdot c}$
2. Secondo S' (particella): $\Delta t_P = \frac{\Delta x'}{0{,}8 \cdot c} = \frac{\Delta x}{\gamma \cdot 0{,}8 \cdot c} = \frac{\Delta t_S}{\gamma}$ (tempo contratto poiché proprio).

11. Relatività della simultaneità

Secondo il senso comune se due eventi avvengono nello stesso istante per un osservatore avvengono contemporaneamente per tutti gli osservatori (la simultaneità è un concetto assoluto).
Secondo la relatività ristretta ciò non è vero: **se un osservatore S giudica due eventi A e B simultanei, un altro osservatore S', in moto rispetto ad S giudicherà i due eventi avvenire in istanti diversi** (a meno che secondo S i due eventi oltre ad avvenire nello stesso istante avvengano anche nello stesso punto), quindi non ha più senso parlare di eventi che avvengono in punti diversi dello spazio-tempo riferendoli allo stesso istante (non ha senso parlare di cosa succede "ora" su Alpha Centauri, il nostro "ora" non coincide con l'"ora" di Alpha Centaurii, si deve parlare di "ora e qui").
Ad esempio: consideriamo un treno che si muova in moto rettilineo uniforme e un osservatore S posto nel centro del treno, supponiamo che egli invii verso i due estremi del treno un raggio di luce.

[4] Vedi Appendice C

Poiché la luce per raggiungere i due estremi nel riferimento del treno deve percorrere lo stesso spazio, **i segnali arriveranno agli estremi contemporaneamente secondo S**. Consideriamo ora un secondo osservatore S' solidale con il terreno che veda S inviare i due segnali mentre S passa vicino a S'; S' vede la coda del treno avvicinarsi e la testa allontanarsi, quindi secondo S il percorso che la luce deve fare per raggiungere la testa è maggiore di quello che deve fare per raggiungere la coda (ricordiamo che sia per S che per S' la luce viaggia alla stessa velocità), perciò **secondo S' la luce arriva prima sulla coda del treno**.

Utilizzando le trasformazioni di Lorentz si dimostra[5] che:

$$t'_A - t'_B = \left(x_B - x_A\right) \cdot \gamma \cdot \frac{v}{c^2}$$

Dalla formula precedente si ricava che se i due eventi secondo S avvengono nello stesso punto, ($x_A = x_B$) allora anche per S' i due eventi appaiono contemporanei.

Nota: quanto vista sembra mettere in crisi il concetto di causa-effetto, infatti se per un osservatore A precede B mentre per un altro B precede A come si può continuare a parlare di relazione di causa-effetto?
In realtà la causalità rimane salvaguardata, due eventi potranno essere causalmente legati, solo se è possibile che un raggio di luce si propaghi da uno all'altro; si dimostra che se un evento A è causa di un evento B (è legato a B da una relazione di causalità) allora esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nello stesso punto ma in istanti successivi. Viceversa, se due eventi non sono legati da una relazione di causalità (sono indipendenti), allora esisterà un riferimento inerziale in cui i due eventi hanno la stessa coordinata temporale (sono simultanei) ma avvengono in punti spaziali diversi (e quindi è impossibile che siano collegati da un raggio di luce).

12. Le leggi di trasformazione della velocità

Come conseguenza del principio di relatività e dell'invarianza della velocità della luce si rende necessario modificare anche le leggi di trasformazione della velocità.
Nella fisica classica la composizione delle velocità era espressa dalle trasformazioni di Galilei:

$\begin{cases} v'_x = v_x - u_x \\ v'_y = v_y - u_y \\ v'_z = v_z - u_z \end{cases}$ ove $\vec{v}$ è la velocità nel sistema S, $\vec{v}'$ è la velocità nel sistema S', $\vec{u}$ è la velocità di S' rispetto a S.

In base a queste trasformazioni, se la luce si muove con velocità c nel sistema S, in S avrà velocità diversa da c; ciò è in contrasto con l'invarianza della velocità della luce e quindi comporta la revisione delle leggi di composizione delle velocità.

Si dimostra[6] che le corrette leggi di composizione sono (nel caso semplificato in cui S' si muova lungo l'asse x in comune con S, e quindi $u_x = u$, $u_y = 0$, $u_z = 0$):

[5] Vedi Appendice D
[6] Vedi appendice E

$$
\begin{cases}
v_x = \dfrac{v'_x + u}{1 + v'_x \dfrac{u}{c^2}} \\
v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma\left(1 + v'_x \dfrac{u}{c^2}\right)} \\
v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma\left(1 + v'_x \dfrac{u}{c^2}\right)}
\end{cases}
$$

Utilizzando queste trasformazioni è facile dimostrare che la velocità della luce è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale (la dimostrazione è lasciata come esercizio).

È utile osservare che, se la velocità relativa di S’ rispetto a S è piccola rispetto a quella della luce, si ha che $\gamma \to 1$, $\dfrac{u}{c^2} \to 0$ e quindi si ritrovano le trasformazioni di Galilei per la velocità che, quindi, costituiscono l’approssimazione non relativistica delle trasformazioni della velocità.

CAPITOLO 2: DINAMICA RELATIVISTICA

I problemi con la dinamica classica

La dinamica classica presenta una serie di problemi quando si tenga conto dei risultati della cinematica relativistica:

1. Dalla legge $\vec{F} = m\vec{a}$ discende che, applicando una forza costante ad un corpo, si ottiene un'accelerazione costante (*m* = costante) e quindi è possibile far raggiungere al corpo una velocità grande a piacere, ciò contrasta con il fatto che il limite alle velocità è *c*.
2. Se si considera l'interazione a distanza fra corpi lontani e si tiene conto del principio di azione e reazione si ottiene che le interazioni devono propagarsi a velocità infinita.

Esaminiamoli nel dettaglio

1. Difficoltà con la seconda legge della dinamica

Possiamo facilmente dedurre che, se la seconda legge è valida nella forma $\vec{F} = m\vec{a}$, è possibile accelerare un elettrone sino alla velocità della luce utilizzando una d.d.p. facilmente ottenibile:

consideriamo un elettrone inizialmente a riposo e calcoliamo quale d.d.p. lo accelera sino a velocità $v = c$

$$F = ma = qE = q\frac{\Delta V}{\Delta s} \Rightarrow a = \frac{q}{m}\frac{\Delta V}{\Delta s}$$

$$\begin{cases} \Delta s = \dfrac{1}{2}at^2 \\ v = at \end{cases} \Rightarrow \Delta s = \frac{v^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v^2}{2\Delta s}$$

$$a = \frac{q}{m}\frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{c^2}{2\Delta s} \Rightarrow \Delta V = \frac{c^2}{2}\frac{m}{q} = \frac{9\cdot 10^{16}}{2}\cdot\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\left[\frac{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{m}}\right]$$

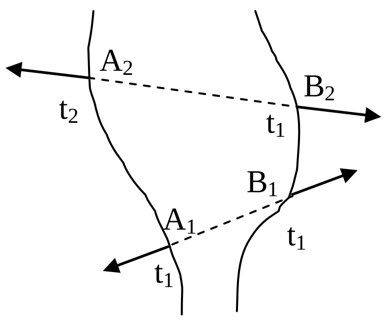
$$\Delta V \approx 256\,\mathrm{kV}$$

Quindi sarebbe sufficiente una d.d.p di soli 260 kV per accelerare un elettrone ad una velocità superiore a quella della luce nel vuoto mentre sappiamo che la velocità della luce è la **velocità limite** (si veda anche il filmato PSSC intitolato *La velocità limite* nonché la simulazione di seconda prova del 25/10/2016 sull'esperimento di Bertozzi).

2. Difficoltà con la terza legge della dinamica

La terza legge della dinamica (o *Principio di azione e reazione* – PAR) non vale nella relatività, vediamo perché.

Supponiamo che il PAR valga in dato sistema inerziale *K* istante per istante e consideriamo due particelle che si muovono ed interagiscono. Le forze dipenderanno dal tempo (perché le distanze tra le due particelle cambiano)



Gli eventi (A_1, t_1) e (B_1, t_1) sono simultanei in K, gli eventi (A_2,t_2) e (B_2,t_2) sono anch'essi simultanei in K, e le forze d'interazione sono sempre tra loro opposte, ma diverse in A_1 e A_2 per intensità e direzione. Se osservo lo stesso fenomeno da un altro Riferimento Inerziale, K', in base al Postulato di Relatività il Principio di Azione e Reazione dovrebbe essere vero anche in K'. Ma gli eventi A_1 e B_1, simultanei in K, non lo sono in K' perché la simultaneità dipende dal riferimento. In K' quando la particella A si trova in A_1 la particella B non si troverà in B_1, ma in un altro punto. Quindi in K' le forze d'interazione saranno diverse.

In conclusione, appare evidente la necessità di riformare la dinamica tenendo conto della relatività ristretta e in particolare delle trasformazioni di Lorentz.
Naturalmente non modificheremo in alcun modo il Primo principio della dinamica in quanto esso fornisce il supporto per l'individuazione dei Sistemi di Riferimento Inerziali

Revisione della definizione di Quantità di Moto

In fisica classica la quantità di moto è definita dalla legge $\vec{p} = m\vec{v}$, ove la **massa è costante**; l'utilizzo della relatività ristretta rende necessario cambiare questa definizione, infatti con questa definizione e l'uso delle trasformazioni di Lorentz si ottiene che se in un sistema inerziale si verifica il principio di conservazione della quantità di moto in altri il principio non vale più (quindi si viola il principio di relatività).

3. Un primo caso particolare: la "regola dell'angolo retto"

Se consideriamo l'urto elastico tra due particelle di uguale massa nel Riferimento inerziale in cui una delle due è ferma, utilizzando la conservazione della quantità di moto e la conservazione dell'energia otteniamo che, dopo l'urto, le particelle si muoveranno su traiettorie ortogonali.
Applicando la conservazione della quantità di moto (indicando con q le quantità di moto dopo l'urto)

$$\vec{p}_1 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$$

Applicando la conservazione dell'energia (è coinvolta solo la cinetica) e ricordando che possiamo scrivere $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$ otteniamo

$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{q_1^2}{2m} + \frac{q_2^2}{2m} \Rightarrow p_1^2 = q_1^2 + q_2^2$$

poiché

$$p_1^2 = \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1 = (\vec{q}_1 + \vec{q}_2) \cdot (\vec{q}_1 + \vec{q}_2) = q_1^2 + q_2^2 + 2\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2$$

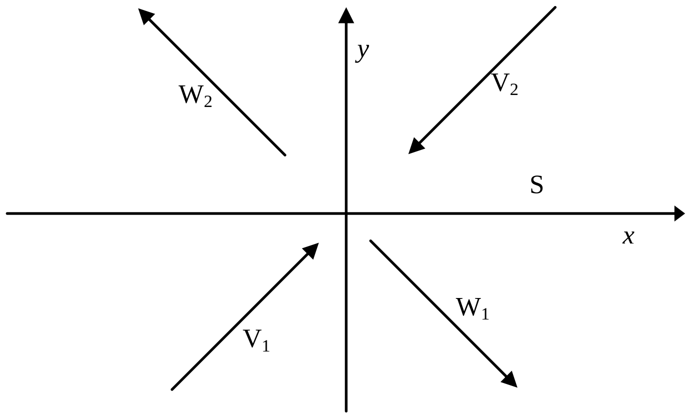
otteniamo infine

$$p_1^2 = q_1^2 + q_2^2 + 2\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = q_1^2 + q_2^2 \Rightarrow \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 = 0$$

Ciò significa che $\vec{q}_1$ e $\vec{q}_2$ sono **ortogonali**!
Se però si analizzano esperimenti in cui una particella relativistica collide con una particella uguale a riposo effettuando un urto elastico si osserva che **l'angolo tra le tracce non è retto**, ciò indica che la previsione classica non è corretta.

4. Il Principio di Conservazione della quantità di moto non è Lorentz - Invariante

Dimostriamo che, utilizzando la definizione "classica" di quantità di moto, si ottiene che il Principio di Conservazione non è invariante sotto Trasformazioni di Lorentz.
Consideriamo un **urto elastico** fra due particelle aventi la **stessa massa** come quello indicato in figura:



Le due particelle hanno la stessa massa e velocità uguali ed opposte. Indichiamo con v_1 e v_2 le velocità prima dell'urto e con w_1 e w_2 le velocità dopo l'urto. Nel sistema di riferimento S le velocità delle particelle formano angoli di 45° con gli assi. Perciò:

$$v_{1x} = -v_{2x} = w_{1x} = -w_{2x}$$

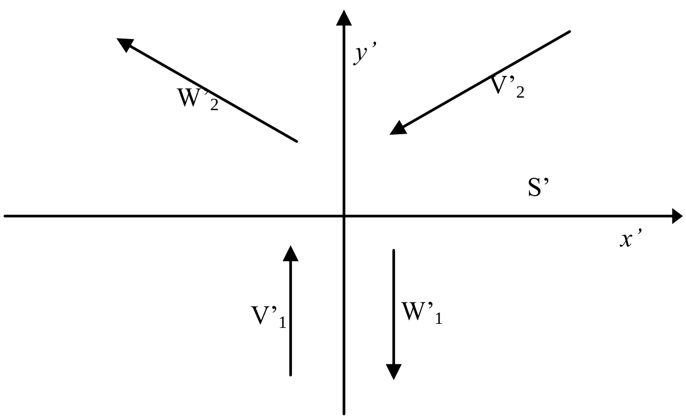
$$v_{1y} = -v_{2y} = -w_{1y} = w_{2y}$$

Quindi valgono le seguenti relazioni:

$$v_{1x} + v_{2x} = 0 \quad w_{1x} + w_{2x} = 0$$

$$v_{1y} + v_{2y} = 0 \quad w_{1y} + v_{2y} = 0$$

Tenendo conto che *m* è la stessa si ottiene che le componenti della quantità di moto sono conservate nell'urto.
Vediamo ora cosa succede cambiando il sistema di riferimento e consideriamo un riferimento *S'* che si muova lungo l'asse *x* con velocità $v = v_{1x}$.



Per trovare le componenti delle velocità utilizziamo le relazioni di trasformazione delle velocità:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \qquad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})}$$

Utilizzando le relazioni precedenti e tenendo conto del fatto che nelle formule si deve porre $u = v_{1x}$ e che per le velocità in *S* valgono le relazioni scritte prima si ottiene:

- Per l'asse *x*:

$$v'_{1x} = 0; \qquad v'_{2x} = \frac{-2v_{1x}}{1 + \frac{v_{1x}^2}{c^2}} \qquad w'_{1x} = 0 \qquad w'_{2x} = \frac{-2v_{1x}}{1 + \frac{v_{1x}^2}{c^2}}$$

da cui si ottiene che: $v'_{1x} + v'_{2x} = w'_{1x} + w'_{2x}$ <u>cioè la componente *x* è conservata</u>.

- Per l'asse *y*:

$$v'_{1y} = \frac{v_{1y}}{\gamma\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} = \gamma v_{1y} \qquad v'_{2y} = \frac{v_{2y}}{\gamma\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)} = \frac{-v_{1y}}{\gamma\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)}$$

$$w'_{1y} = \frac{w_{1y}}{\gamma\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} = \gamma w_{1y} = -\gamma v_{1y} \qquad w'_{2y} = \frac{w_{2y}}{\gamma\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)} = \frac{v_{1y}}{\gamma\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)}$$

<u>Sommando le componenti della quantità di moto lungo l'asse *y* prima e dopo l'urto si ottengono risultati diversi, quindi la componente *y* della quantità di moto non è conservata</u>! Infatti si ottiene

$$v'_{1y} + v'_{2y} = v_{1y}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)}\right) \qquad w'_{1y} + w'_{2y} = -v_{1y}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)}\right)$$

Conclusione: la quantità di moto definita come $\vec{p} = m\vec{v}$ non soddisfa un principio di conservazione invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

5. Revisione della definizione di quantità di moto

A questo punto sono disponibili tre scelte:

- Abbandonare il principio di conservazione della quantità di moto: tale scelta non è accettabile in quanto il principio risulta una conseguenza della simmetria dello spazio rispetto alle traslazioni (cioè imponendo che le equazioni del moto siano invarianti per traslazioni spaziali si ottiene una grandezza conservata, tale grandezza è proprio la quantità di moto).
- Abbandonare la relatività ristretta e le trasformazioni di Lorentz.
- Riformulare la definizione di quantità di moto in modo che se la quantità di moto relativistica è conservata in un sistema inerziale lo sia in tutti.

Ci accingiamo quindi a ridefinire opportunamente la quantità di moto.
Partiamo osservando che nell'esempio discusso la non conservazione della quantità di moto deriva dal comportamento della componente *y*, per essa infatti la quantità di moto è espressa dal rapporto fra Δy (invariante per i due sistemi di riferimento) e Δt (il cui valore cambia secondo i due sistemi

di riferimento) essendo la quantità di moto lungo y espressa da $p_y = mv_y = m\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Nelle trasformazioni di Galileo, viceversa, sia Δy che Δt sono degli invarianti.

Possiamo recuperare il principio di conservazione se cerchiamo di esprimere la componente y della quantità di moto mediante il rapporto di due grandezze relativisticamente invarianti e a tale scopo operiamo sul tempo.

Infatti è sufficiente notare che l'invariante temporale (ossia l'intervallo di tempo sul cui valore tutti gli osservatori inerziali concordano) è l'intervallo di tempo proprio

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

(ogni osservatore misurerà un proprio tempo che dipenderà da $\Delta\tau$ mediante γ, ma tutti, fatti i calcoli, concorderanno sul valore di $\Delta\tau$).

Quindi se anziché usare il tempo Δt utilizziamo il tempo proprio, otteniamo una nuova definizione che contiene il rapporto fra grandezze invarianti):

$$p_y = m\frac{\Delta y}{\Delta \tau} = m\gamma\frac{\Delta y}{\Delta t} = m\gamma v_y$$

Questa si estende senza problemi alle altre due componenti (in particolare ricordiamo che la componente x si conservava comunque e moltiplicare per il fattore γ non comporta modifiche - *provare a fare i calcoli per verifica*).

Quindi procediamo a ridefinire la **quantità di moto relativistica** nel seguente modo:

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau} = m\gamma\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Utilizzando la precedente definizione si può dimostrare[7] che il Principio di Conservazione della Quantità di Moto è invariante sotto Trasformazioni di Lorentz.

Revisione della legge fondamentale della dinamica

Avendo cambiato la definizione della quantità di moto appare chiara la necessità di cambiare la legge fondamentale della dinamica che esprime il legame tra la forza (causa) e l'effetto (variazione del moto del corpo), possiamo considerare ancora valida la formulazione secondo la quale la forza produce variazioni della quantità di moto, mentre non è più vero che F è proporzionale all'accelerazione.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

[7] Vedi appendice A

6. Il caso unidimensionale

Possiamo iniziare ricavando la relazione tra forza e accelerazione nel caso semplice in cui la forza sia diretta lungo l'asse delle ascisse e la particella abbia velocità diretta lungo l'asse delle ascisse (caso unidimensionale)[8]:

$$F = \frac{d(m\gamma v)}{dt} = mv\frac{d\gamma}{dt} + m\gamma\frac{dv}{dt}$$

ricordiamo che $\frac{dv}{dt} = a$ e esplicitiamo $\frac{d\gamma}{dt}$:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dv}\frac{dv}{dt} = a\frac{d\gamma}{dv} = a\frac{d}{dv}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{-1}{2}} = a\left[-\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\right]$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = a\left[\frac{v}{c^2}\gamma^3\right]$$

quindi

$$F = mv\frac{d\gamma}{dt} + m\gamma\frac{dv}{dt} = ma\gamma\left(\frac{v^2}{c^2}\gamma^2 + 1\right) = ma\gamma^3$$

$$a = \frac{F}{m\gamma^3}$$

Analizzando questi risultati si osserva che quando $v<<c$ allora $\gamma\to1$ e quindi si trova la legge classica; se invece $v \cong c$, allora $\gamma\to\infty$, perciò una forza, per quanto grande, non ha più effetto sull'accelerazione, che tenderà a zero.

Massa e Inerzia

Spesso si trova l'affermazione che la dinamica relativistica implica che la massa dei corpi non è più costante, ma dipende dalla velocità secondo la legge, ottenuta da quella della quantità di moto, $m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, intendendo con m_0 la massa a riposo (cioè la massa secondo un osservatore inerziale solidale con la massa). Questo tipo di interpretazione ha avuto molti estimatori, non ultimi R. Feynmann (che utilizza questo concetto nelle sue "*Lectures*") e B. Touschek (nel suo "*Corso di Relatività Ristretta*").
Effettuando questa scelta l'espressione della quantità di moto rimane uguale a quella classica e si riesce a ricavare abbastanza agevolmente la definizione per la quantità di moto relativistica e per l'energia relativistica.

Noi, viceversa, continueremo a considerare la massa come una costante e diremo invece che l'inerzia del corpo cambia con la velocità, in questo modo manterremo l'idea che la massa sia una caratteristica intrinseca dei corpi (analogamente alla carica elettrica e a grandezze quantizzate quali

[8] La dimostrazione per il caso tridimensionale sarà affrontata dopo l'introduzione dell'energia

lo spin) che li caratterizza e abbandoneremo l'idea che si identifichi con l'inerzia del corpo (quest'ultima sarà data da γm)[9].

Relatività ed elettromagnetismo

7. Legami tra relatività speciale ed elettromagnetismo

La teoria della Relatività Speciale nasce con l'obiettivo di rendere il principio di Relatività compatibile con le Equazioni di Maxwell e con i fenomeni elettromagnetici (l'articolo originale di Einstein si intitola "*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*" ossia "*Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*" e dedica ampio spazio all'analisi del moto delle cariche elettriche in presenza di campi elettrici e magnetici. Lo stesso Lorentz rielabora le sue trasformazioni alla ricerca di un gruppo di trasformazioni che renda le Equazioni di Maxwell invarianti.

D'altra parte è ben noto che una carica in quiete nel riferimento inerziale K genera un campo elettrico $\boldsymbol{E}$ ma, la stessa carica, osservata in un RI K' nel quale si muova con velocità v (è sufficiente che K' si muova rispetto a K con velocità $-v$) genera, oltre al campo elettrico, anche un campo magnetico B, ciò indica chiaramente che i fenomeni elettromagnetici sono strettamente correlati alla Relatività Speciale, al punto che possiamo affermare che "il campo magnetico è un effetto relativistico".

Appare quindi opportuno ricercare come si trasformino i campi elettrici e magnetici nel passaggio da un RI ad un altro[10].

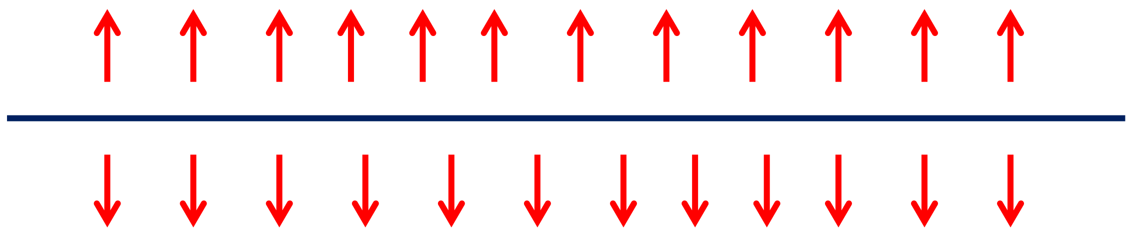
8. Le trasformazioni dei campi elettrici e magnetici

Per ricavare (almeno parzialmente) le trasformazioni per i campi elettrici e magnetici analizziamo il caso di una distribuzione di carica lineare trattabile come infinita; prima analizzeremo la situazione in un riferimento inerziale K in cui la distribuzione appaia in quiete, poi passeremo in un sistema K' in cui appaia in moto con velocità parallela alla distribuzione.

8.1. Nel riferimento *K*

La distribuzione lineare di carica (supponiamo sia positiva) è caratterizzata dalla densità lineare di carica $\lambda = \dfrac{q}{L}$; il campo prodotto ha simmetria radiale (i vettori sono ortogonali alla distribuzione) e ha modulo che dipende dalla distanza r dalla distribuzione:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

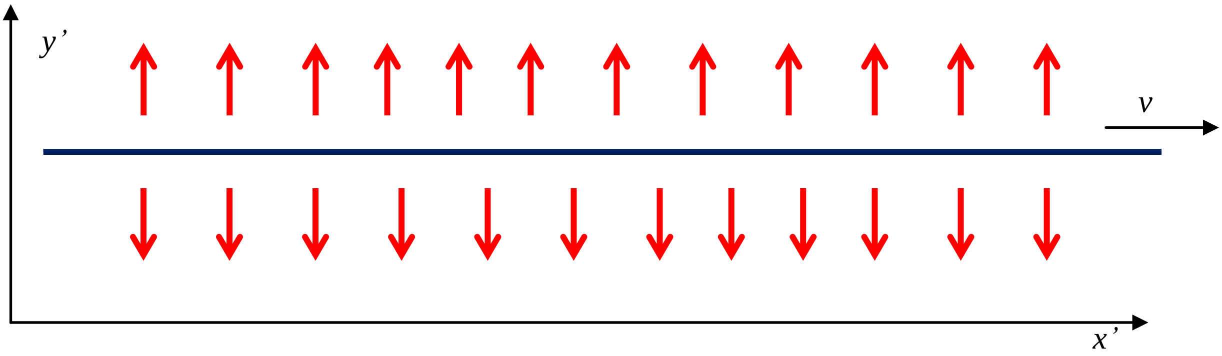


[9] Questa scelta, ad un livello più avanzato, è legata anche al fatto che $m\gamma$ non ha carattere tensoriale bene definito e quindi non ha significato fisico ben definito

[10] In questo modo sarà possibile anche osservare una serie di analogie tra il comportamento dei campi, quello dell'energia e dell'impulso, quello delle coordinate spazio temporali.

8.2. Nel riferimento *K'*

Consideriamo ora un riferimento inerziale *K'* che si muova, rispetto a *K*, verso sinistra, parallelamente alla distribuzione, con velocità $-v$, in tal modo le cariche appariranno muoversi con velocità v (verso destra all'osservatore posto in *K*').



La distribuzione lineare di carica sarà ora caratterizzata dalla densità lineare di carica $\lambda' = \frac{q}{L'}$.

Utilizzando le TL sappiamo che (contrazione delle lunghezze) $L' = \frac{L}{\gamma}$ e quindi, il campo elettrico in *K'* sarà dato da (consideriamo la carica un invariante e ricordiamo che le dimensioni ortogonali alla velocità relativa non cambiano, quindi r non cambia)

$$E' = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{L'}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r} = \gamma\frac{q}{L}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r} = \gamma E$$

Nel riferimento *K'* le cariche si muovono e quindi si comportano come una corrente elettrica di intensità *I'* e quindi genereranno un campo magnetico ***B'*** analogo a quello generato da una corrente rettilinea indefinita. Le linee di forza del campo ***B'*** sono delle circonferenze giacenti in piani perpendicolari alla distribuzione, quindi in ogni punto dello spazio il vettore ***B'*** è perpendicolare sia al vettore ***E'*** sia la vettore ***v***.
Calcoliamo l'intensità di corrente *I'*:

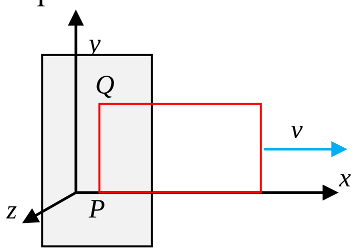
$$I' = \frac{q}{\Delta t'} = \frac{\lambda'\Delta s'}{\Delta t'} = \lambda' v$$

Calcoliamo il campo *B'*

$$B' = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I'}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{\lambda' v}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{\gamma\lambda v}{r} = \mu_0\varepsilon_0\gamma E v$$

9. Applicazione delle trasformazioni dei campi al caso di una spira

Consideriamo una spira rigida rettangolare che venga estratta a velocità costante da una zona in cui è presente un campo magneti uniforme e costante *B* (uscente dal piano del foglio); il piano della spira è perpendicolare alle linee del campo e la velocità è anch'essa perpendicolare al campo.



$$\vec{B} \equiv (0,0,B) \qquad \vec{v} \equiv (v,0,0) \qquad \vec{E} \equiv (0,0,0)$$

Iniziamo con esaminare la situazione nel Riferimento Inerziale K solidale con campo B. Gli elettroni di conduzione presenti nel tratto PQ si muovono solidali alla spira e quindi risentono di una Forza di Lorentz diretta lungo PQ che li mette in moto nella stessa direzione:

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

$$F_x = F_z = 0 \qquad\qquad F_y = evB$$

Analizziamo ora il fenomeno nel riferimento K' solidale con la spira e utilizziamo le trasformazioni dei campi tenendo conto che K' si muove rispetto a K con velocità $u = v$. Sappiamo che:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad \wedge \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \times \vec{B}_{\perp}\right)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \quad \wedge \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{u} \times \vec{E}_{\perp}\right)$$

O anche

$$E'_x = E_x \quad E'_y = \gamma\left(E_y - uB_z\right) \quad E'_z = \gamma\left(E_z + uB_y\right)$$

$$B'_x = B_x \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{u}{c^2}E_z\right) \quad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{u}{c^2}E_y\right)$$

Quindi:

$$E'_x = 0 \quad \wedge \quad E'_y = \gamma(-uB) \quad \wedge \quad E'_z = 0$$

$$B'_x = 0 \quad \wedge \quad B'_y = 0 \quad \wedge \quad B'_z = \gamma B$$

Notiamo che nel Riferimento Inerziale K' non solo cambia il modulo del campo magnetico (ma non la direzione, né il verso, ma nasce un campo elettrico diretto lungo l'asse y.
Analizziamo ora le forze che agiscono nel sistema K'; dato che in tale sistema la spira è stazionaria le cariche contenute nel tratto PQ non subiscono la Forza di Lorentz. Nel tratto PQ è ora presente un campo elettrico diretto lungo il segmento, tale campo produce una forza

$$F'_y = -eE'_y = \gamma euB = \gamma F_y$$

Quindi nel cambiamento di sistema di riferimento cambiano i campi e cambiano le forze (modulo ma non direzione o verso).
Le forze non sono più degli invarianti.

ENERGIA RELATIVISTICA

Avendo provveduto a modificare i concetti di spazio, tempo, forza e quantità di moto, appare evidente la necessità di ridefinire il concetto di energia nella Relatività Speciale.

Abbiamo a disposizione diverse strade per arrivare al risultato richiesto[11].

13. Approccio basato sull'utilizzo del lavoro

La prima strada che possiamo intraprendere si basa sulla richiesta che, come nella meccanica newtoniana, l'energia cinetica corrisponda al lavoro compiuto da una forza per portare un corpo di massa *m* da velocità nulla a velocità *u*.

Procediamo quindi al calcolo del lavoro considerando una forza costante che agisca nella direzione dell'asse delle ascisse

$$L = \int_0^u \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Utilizziamo la relazione precedentemente ottenuta per esprimere la forza in funzione del fattore γ e dell'accelerazione:

$$F = \frac{d(m\gamma v)}{dt} = ma\gamma^3$$

$$L = \int_0^u ma\gamma^3 dx$$

Sappiamo che $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow L = m\int_0^u a\gamma^3 vdt$, inoltre sappiamo anche che $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$

Otteniamo quindi infine

$$L = m\int_0^u v\gamma^3 dv = m\int_0^u v\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} dv$$

Procedendo mediante sostituzione otteniamo:

$$z = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow dz = -\frac{2v}{c^2}dv \Rightarrow vdv = -\frac{c^2}{2}dz$$

$$L = m\int_0^{z(u)} \left(-\frac{c^2}{2}\right) z^{-\frac{3}{2}} dt = -\frac{mc^2}{2}\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\left[z^{-\frac{1}{2}}\right]_{z(0)}^{z(u)}$$

[11] Una strada alternativa a quella riportata qui di seguito è indicata in APPENDICE A

$$L = -mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right]_0^u = mc^2(\gamma - 1)$$

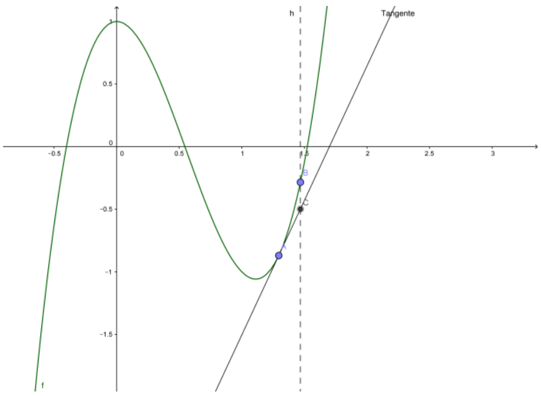
Abbiamo quindi ottenuto che $L = mc^2(\gamma - 1)$ e quindi stabiliamo che **l'energia cinetica relativistica** K è espressa dalla relazione:

$$K = mc^2(\gamma - 1)$$

Per avere la certezza che la relazione trovata è una buona espressione per l'energia cinetica è opportuno assicurarsi che per velocità piccole essa fornisce lo stesso risultato della relazione classica.

13.1. Approssimazione lineare

Dobbiamo cercare di approssimare l'espressione del fattore γ per piccole velocità, a tale scopo usiamo il concetto di *approssimazione lineare*, ossia approssimiamo (in un intorno di x_0) il valore di una funzione mediante il valore della tangente alla funzione nel punto x_0.



Approssimiamo la coordinata y del punto B mediante la coordinata y del punto C che appartiene alla tangente al grafico della funzione passante per il punto A; il coefficiente angolare della tangente passante per A è dato da $f'(x_A) = f'(x_0)$, poi utilizziamo la relazione per scrivere l'equazione di una retta passante per un punto: $y = y_0 + m(x - x_0)$

$$f(x) = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

La funzione $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ dipende da $x = v^2/c^2$ e inoltre $\gamma(0) = 1$. Cercheremo di calcolare il valore approssimato di $\gamma(x)$ in corrispondenza di $h = v^2/c^2$ (con h piccolo, ossia per $v \ll c$, partendo da $x_0 = 0$)

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow \gamma(h) \approx \gamma(0) + D\left[\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right]_{x=0} \cdot h$$

Quindi

$$\gamma(x) \approx 1 + D\left[\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right]_{x=0} \cdot h$$

ma la derivata della funzione è

$$D\left[\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}} \Rightarrow \gamma'(0) = \frac{1}{2}$$

Quindi otteniamo che per velocità piccole rispetto a quella della luce vale

$$\gamma(x) \approx 1 + \frac{1}{2}h = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

e infine

$$K = mc^2(\gamma - 1) \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

Abbiamo quindi ottenuto che, per velocità piccole rispetto a quella della luce, **l'energia cinetica relativistica è approssimata dall'energia cinetica classica**, quindi l'espressione ottenuta può a buon diritto essere considerata l'energia cinetica relativistica.

13.2. L'energia relativistica e il suo significato fisico

Abbiamo ottenuto un'espressione per l'energia cinetica relativistica

$$K = mc^2(\gamma - 1)$$

Con semplici passaggi algebrici otteniamo l'espressione

$$E = K + mc^2 = mc^2\gamma$$

a cui diamo il nome di **energia relativistica**, essa è composta dalla somma di due termini, uno rappresentante l'energia cinetica e uno, **invariante**, dipendente dalla massa del corpo, a questo termine, mc^2 si da il nome di **energia della massa a riposo** (o **energia di riposo**).

Quale significato possiamo attribuire all'energia di riposo?

Evidentemente essa rappresenta l'energia che il corpo (libero, non interagente e quindi non si tratta di energia potenziale) possiede nel sistema di riferimento in cui è in quiete; a differenza di quanto avviene nella meccanica newtoniana una particella libera e in quiete **possiede comunque un'energia fissata** (non si tratta della costante arbitraria che compare nell'energia nel caso newtoniano) che dipende dalla sua massa e, in tal senso, possiamo anche attribuire alla massa il significato di energia del corpo nel sistema in cui è in quiete.

13.3. Equivalenza massa - energia

In quali modi possiamo modificare l'energia relativistica di una particella libera?

- Possiamo modificare la velocità della particella (ossia agire su di essa con una forza che compie lavoro), in tal modo cambiamo il fattore γ e quindi E (questo è analogo a quanto accade nella meccanica newtoniana).
- Possiamo modificare la massa del corpo (togliere massa, aggiungere massa...), ad esempio nei processi di annichilazione particella - antiparticella la massa delle particelle "sparisce" (le particelle spariscono) e si ottiene energia (tipicamente sotto forma di fotoni) che può anche "materializzare" generando particelle con massa complessiva diversa dalla somma delle masse delle particelle originali.

In modo analogo possiamo modificare la massa di un corpo, ogni volta che forniamo energia ad un corpo (ad esempio inviamo radiazione su di esso) ne aumentiamo la massa.

13.4. La conservazione dell'energia

Nella fisica newtoniana abbiamo il Principio di Conservazione della Massa e la Legge di Conservazione dell'Energia Meccanica (l'energia meccanica di un sistema sottoposto a sole forze conservative è costante nel tempo).

Nella Relatività Speciale ciò che si conserva è l'*Energia Relativistica*, ossia la somma delle quantità $mc^2\gamma$ delle particelle coinvolte, la massa totale delle particelle può cambiare.

Mentre nella meccanica newtoniana negli urti si ha conservazione dell'energia (cinetica) solo nel caso di urti elastici nella relatività speciale questa limitazione non è più presente; gli urti elastici sono interazioni in cui le particelle mantengono la loro identità (ad esempio lo scattering Rutherford, ossia l'*urto* tra un nucleo di elio e un nucleo di un atomo - si tratta di una diffusione dovuta alla repulsione legata alla forza elettrica), un urto anelastico è un'interazione nella quale le particelle non mantengono la loro identità originale. In ogni caso vale la conservazione dell'energia.

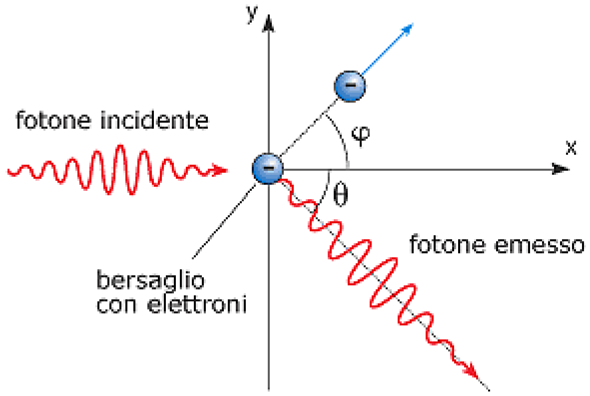
13.4.1. Un esempio di conservazione dell'energia in "urto elastico" - Lo scattering Compton

Un esempio di calcolo nel quale si utilizza la conservazione dell'energia relativistica, assieme alla conservazione della quantità di moto e alle idee della fisica quantistica, è la diffusione (scattering = deviazione) di un fotone (trattato come particella) da parte di un elettrone appartenente agli orbitali esterni di un metallo.

Conservazione dell'Energia (prima dell'urto l'elettrone ha l'energia di riposo, è considerato praticamente fermo, poi rincula e acquista quantità di moto):

$$E_\gamma + mc^2 = E'_\gamma + E_e$$

Conservazione della Quantità di moto (scegliendo come asse *x* la direzione del moto del fotone originale)



$$\begin{cases} p_\gamma = p'_\gamma \cos\theta + p'_e \cos\varphi \\ 0 = p'_\gamma \sin\theta - p'_e \sin\varphi \end{cases}$$

Si utilizzano le relazioni $E_\gamma = cp_\gamma$ e $E_e^2 = m^2c^4 + p_e^2c^2$[12] per arrivare, mediante alcune manipolazioni algebriche, al risultato.

Nella seconda equazione separiamo ed eleviamo al quadrato, nella prima isoliamo il termine riguardante l'elettrone ed eleviamo al quadrato:

$$\begin{cases} p_\gamma - p'_\gamma \cos\theta = p'_e \cos\varphi \\ p'_\gamma \sin\theta = p'_e \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(p_\gamma - p'_\gamma \cos\theta\right)^2 = p'^2_e \cos^2\varphi \\ p'^2_\gamma \sin^2\theta = p'^2_e \sin^2\varphi \end{cases}$$

Sommiamo membro a membro e utilizziamo le identità goniometriche:

[12] Vedi paragrafo successivo in cui sono dedotte

$$p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 \cos^2\theta - 2p_\gamma p_\gamma' \cos\theta + p_\gamma'^2 \sin^2\theta = p_e'^2 \cos^2\varphi + p_e'^2 \sin^2\varphi$$

$$p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p_\gamma' \cos\theta = p_e'^2$$

Ora utilizziamo la relazione ottenuta per le quantità di moto assieme a quella per le energie:

$$\begin{cases} p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p_\gamma' \cos\theta = p_e'^2 \\ cp_\gamma + mc^2 = cp_\gamma' + E_e' \end{cases}$$

Eleviamo al quadrato la seconda equazione dopo aver separato i termini per il fotone e l'elettrone e aver diviso per c:

$$\begin{cases} p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p_\gamma' \cos\theta = p_e'^2 \\ p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p_\gamma' = m^2c^2 + \dfrac{E_e'^2}{c^2} - 2mE_e' \end{cases}$$

Ora sottraiamo membro a membro:

$$2p_\gamma p_\gamma' - 2p_\gamma p_\gamma' \cos\theta = p_e'^2 - m^2c^2 - \frac{E_e'^2}{c^2} + 2mE_e'$$

Ricordiamo la relazione fondamentale $E_e^2 = m^2c^4 + p_e^2c^2$ che ci permette di semplificare:

$$2p_\gamma p_\gamma'(1-\cos\theta) = -2m^2c^2 + 2mE_e'$$

Quindi, sfruttando il fatto che $cp_\gamma + mc^2 = cp_\gamma' + E_e'$ da cui si ottiene $E_e' - mc^2 = c(p_\gamma - p_\gamma')$, arriviamo a:

$$p_\gamma p_\gamma'(1-\cos\theta) = m_e c(p_\gamma - p_\gamma')$$

Dividendo per $p_\gamma p_\gamma'$ e per $m_e c$ otteniamo infine

$$\frac{1}{m_e c}(1-\cos\theta) = \frac{1}{p_\gamma'} - \frac{1}{p_\gamma}$$

Poiché nella Teoria dei Quanti (relazione di de Broglie) abbiamo che la quantità di moto è legata alla lunghezza d'onda dalla relazione $p = \dfrac{h}{\lambda}$ arriviamo infine alla relazione per il cambiamento di lunghezza d'onda del fotone diffuso (spostamento Compton)

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$$

Questa relazione è stata ottenuto quindi utilizzando le relazioni per energia e quantità di moto relativistiche, trattando la diffusione come un urto tra particelle e infine sfruttando la relazione quantistica di de Broglie (si tratta quindi di evidenza del comportamento particellare della luce); è un primo esempio di utilizzo combinato di concetti quantistici e relativistici.

ENERGIA E QUANTITA' DI MOTO

14. La relazione tra energia e quantità di moto

Cerchiamo ora di trovare quale relazione esista tra energia e quantità di moto; nella fisica newtoniana valeva la relazione $K = \frac{p^2}{2m}$, cerchiamo una relazione analoga:

$$E_R = mc^2\gamma \quad \wedge \quad \vec{p} = m\vec{v}\gamma \Rightarrow$$
$$E_R^2 = m^2c^4\gamma^2 \quad \wedge \quad p^2 = m^2\gamma^2v^2$$

Utilizzando la definizione del fattore γ possiamo ottenere la seguente identità

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma^2v^2 = c^2\gamma^2 - c^2$$

Quindi sostituendo nell'espressione di p^2 otteniamo

$$p^2 = m^2\left(c^2\gamma^2 - c^2\right)$$

da cui con semplici passaggi otteniamo

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

Questa equazione fornisce la **relazione tra energia e quantità di moto**

14.1. L'invariante energia - impulso

La relazione precedente si presta ad una importantissima interpretazione, infatti con un semplice passaggio si ottiene

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

il membro di destra di questa equazione è un invariante (sia *m* che *c* lo sono!), quindi anche l'espressione di sinistra è **invariante** che prende il nome di **invariante energia impulso**[13]

14.2. Particelle prive di massa

La relazione che lega la quantità di moto e l'energia continua ad essere vera anche per particelle prive di massa (come i fotoni, i quanti del campo elettromagnetico); per i fotoni abbiamo:

$$E^2 = p^2c^2 \Rightarrow p = \frac{E}{c}$$

Quindi otteniamo che per una particella priva di massa è possibile comunque parlare di quantità di moto (questa relazione è comunque ottenibile anche nell'ambito della fisica classica analizzando la "*pressione di radiazione*" ossia studiando come un'onda elettromagnetica possa trasferire energia ad una carica).

[13] Vedremo successivamente che l'invariante energia - impulso corrisponde al modulo quadrato di un 4-vettore e quindi l'invarianza per trasformazioni di Lorentz è conseguenza del fatto che esse sono rotazioni nello spazio dei 4-vettori.

Dalla relazione precedente è anche possibile ottenere una importante conclusione per le particelle prive di massa, infatti confrontando la relazione $E = mc^2\gamma$ con la relazione $p = m\gamma v$ otteniamo

$$\frac{E}{p} = \frac{m\gamma c^2}{m\gamma v} \Rightarrow \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v}$$

Per particelle prive di massa vale anche $E/p = c$ e quindi

$$\frac{E}{p} = \frac{c^2}{v} = c \Rightarrow \frac{c}{v} = 1 \Rightarrow v = c$$

Ciò significa che, **nel vuoto**, una particella priva di massa (come il fotone) è costretta ad avere velocità pari a c sempre, non può esistere un riferimento inerziale in cui la particella appare in quiete.

15. Le trasformazioni per l'Energia e per la Quantità di moto

Vogliamo determinare come trasformano l'energia e la quantità di moto nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro. Riprendiamo la definizione per la quantità di moto e riscriviamo opportunamente l'energia tenendo conto del fatto che (per la dilatazione degli intervalli temporali) vale $\gamma = \frac{dt}{d\tau}$ (si ricordi che $d\tau$ rappresenta l'intervallo di tempo proprio).

$$p_x = m\frac{dx}{d\tau} \quad p_y = m\frac{dy}{d\tau} \quad p_z = m\frac{dz}{d\tau} \quad E = m\gamma c^2 = mc^2\frac{dt}{d\tau}$$

m e $d\tau$ sono quantità invarianti, quindi la trasformazione delle componenti dipende solo dalla trasformazione delle coordinate *x*, *y*, *z* e *t*:

$$p'_x = m\frac{dx'}{d\tau} = m\frac{d[\gamma(x-ut)]}{d\tau} = \gamma m\frac{dx}{d\tau} - \gamma mu\frac{dt}{d\tau} = \gamma\left(p_x - \frac{u}{c^2}E\right)$$

$$p'_y = m\frac{dy'}{d\tau} = m\frac{dy}{d\tau} = p_y$$

$$p'_z = m\frac{dz'}{d\tau} = m\frac{dz}{d\tau} = p_z$$

$$E' = mc^2\frac{dt'}{d\tau} = mc^2\frac{d\left[\gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)\right]}{d\tau} = \gamma mc^2\frac{dt}{d\tau} - \gamma mc^2\frac{u}{c^2}\frac{dx}{d\tau} = \gamma(E - up_x)$$

Si può notare che le trasformazioni per l'impulso e l'energia hanno una forma molto simile a quelle delle coordinate spazio temporali, infatti ponendo $p_0 = E/c$ e (nelle trasformazioni per le coordinate) $x_0 = ct$ si ottiene:

Coordinate spazio temporali	Energia e quantità di moto
$x' = \gamma\left(x - \frac{u}{c}x_0\right)$ $x'_0 = \gamma\left(x_0 - \frac{u}{c}x\right)$	$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{u}{c}p_0\right)$ $p'_0 = \gamma\left(p_0 - \frac{u}{c}p_x\right)$

Le leggi di trasformazione sono perfettamente analoghe e ciò suggerisce l'idea di introdurre una nuova categoria di oggetti, i **quadrivettori** (vettori di uno spazio vettoriale a 4 dimensioni). Un quadrivettore sarà indicato con la notazione:

$$x^i = (x_0; x_1; x_2; x_3)$$

Ogni quadrivettore trasforma (nel passaggio da un Sistema di Riferimento Inerziale ad un altro che si muova nel modo consueto, ossia lungo l'asse x comune mantenendo gli assi paralleli) con le relazioni:

$$\begin{aligned}
x'_1 &= \gamma\left(x_1 - \frac{u}{c}x_0\right)\\
x'_0 &= \gamma\left(x_0 - \frac{u}{c}x_1\right)\\
x'_2 &= x_2\\
x'_3 &= x_3
\end{aligned}$$

Sono esempi di 4 – vettori il quadrivettore coordinate spazio tempo e il quadrivettore energia – impulso.

CAPITOLO 3: INVARIANTI RELATIVISTICI

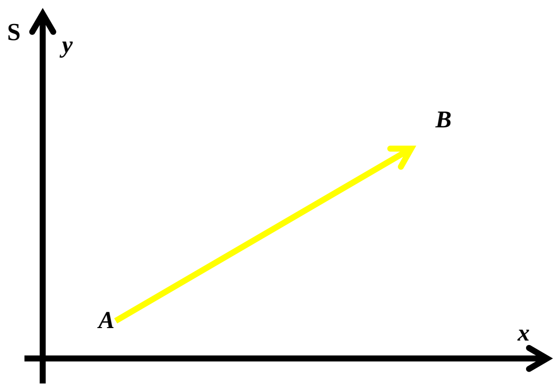
Nella meccanica classica ci sono alcune grandezze che non cambiano passando da un Riferimento Inerziale ad un altro (ossia sono invarianti per Trasformazioni di Galilei): la massa, la carica, la lunghezza dei corpi, l'intervallo di tempo tra due eventi, l'accelerazione (e di conseguenza anche le forze). Molte di queste grandezze non sono più invarianti nella Relatività Speciale e quindi è opportuno cercare di determinare, se esistono, altre grandezze che risultino invarianti per Trasformazioni di Lorentz.

L'invariante intervallo spazio – tempo

1. Individuazione dell'intervallo spazio - tempo

Abbiamo visto che, come conseguenza del principio di relatività e dell'invarianza della velocità della luce, la lunghezza dei corpi e la durata degli intervalli temporali dipende dall'osservatore, quindi queste due grandezze non sono più invarianti come accadeva nella fisica "classica". È però possibile utilizzare la distanza spaziale e quella temporale, opportunamente combinate, per *costruire* un nuovo *invariante*, estremamente utile nella descrizione dei fenomeni cinematici e nella soluzione di problemi. Tale invariante prende il nome di **intervallo spazio – temporale**.

Per ricercare la forma dell'invariante che prenderà il posto della lunghezza e della durata temporale iniziamo considerando un raggio di luce che si propaghi da un punto A ad un punto B (nel sistema di riferimento inerziale *S*):



La distanza spaziale tra i due punti è data da:

$$\Delta r = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Trattandosi di un raggio di luce la distanza spaziale è legata a quella temporale dalla relazione:

$$\Delta r = c\Delta t$$

Quindi, elevando al quadrato e sottraendo otteniamo:

$$c^2\Delta t^2 - (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = 0$$

Dato che, per i postulati relativistici, la velocità della luce è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale, se osserviamo la propagazione del raggio in un altro riferimento inerziale S' otterremo

$$c^2\Delta t'^2 - (x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2 + (z'_A - z'_B)^2 = 0$$

cioè gli intervalli temporali e le distanze spaziali saranno diversi ma la combinazione sopra scritta rimarrà nulla in ogni riferimento inerziale e quindi sarà un *invariante*.

È quindi ipotizzabile che la quantità $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2$ sia invariante per qualsiasi coppia di eventi spazio temporali, A e B. Ciascun evento sarà individuato, in un sistema di riferimento inerziale *S*, da una coordinata temporale *t* e da tre coordinate spaziali: *x*, *y*, *z*.

La distanza spaziale fra i due eventi, misurata da *S* e data da $\Delta r = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$, apparirà diversa ad un osservatore, solidale con un sistema di riferimento *S'*, in moto rettilineo uniforme rispetto a *S*; lo stesso avverrà per l'intervallo di tempo $\Delta t = t_B - t_A$ che intercorre fra i due eventi.

Dimostriamo ora che la grandezza: $I = \Delta s^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta r^2$ è un i**nvariante**.

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale *S'* che si muova rispetto al sistema di riferimento inerziale *S* con velocità *v*, nella direzione dell'asse *x* comune.

Secondo l'osservatore posto in S', l'intervallo spazio – temporale *I'* è dato da

$$I' = c^2 \cdot (\Delta t')^2 - (\Delta r')^2$$

applicando le trasformazioni di Lorentz per le coordinate spaziali e temporali è possibile esprimere *t'*, *x'*, *y'* e *z'* in funzione di *x*, *y*, *z* e *t* (per semplicità di calcolo e di espressione considereremo solo una coordinata spaziale, *x*, senza per questo perdere di generalità):

$$I' = c^2\left[\gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}x_A\right) - \gamma\left(t_B - \frac{v}{c^2}x_B\right)\right]^2 - [\gamma(x_A - vt_A) - \gamma(x_B - vt_B)]^2 .$$

Per rendere più semplici i calcoli possiamo supporre che l'evento *B* avvenga nell'origine del sistema *S* all'istante 0; tale scelta non pregiudica la generalità dei risultati acquisiti, dato che è sempre possibile scegliere in modo arbitrario l'origine degli assi cartesiani e l'origine dei tempi, in ogni caso i calcoli possono essere svolti anche senza questa scelta, pervenendo allo stesso risultato con qualche passaggio algebrico in più.

Otteniamo in tal modo:

$$I' = c^2\gamma^2\left(t_A - \frac{v}{c^2}x_A\right)^2 - [\gamma(x_A - vt_A)]^2 = c^2\gamma^2\left(t_A^2 + \frac{v^2}{c^4}x_A^2 - 2t_A\frac{v}{c^2}x_A\right) - \gamma^2\left(x_A^2 + v^2t_A^2 - 2x_At_Av\right)$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$I' = \gamma^2\left(c^2t_A^2 + \frac{v^2}{c^2}x_A^2 - 2t_Avx_A - x_A^2 - v^2t_A^2 + 2x_At_Av\right) = \gamma^2\left(c^2t_A^2 + \frac{v^2}{c^2}x_A^2 - x_A^2 - v^2t_A^2\right) =$$

$$\gamma^2\left[t_A^2(c^2 - v^2) - x_A^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] = c^2t_A^2 - x_A^2 = I$$

Si è quindi ottenuto che l'intervallo spazio-temporale misurato nel riferimento inerziale *S* è uguale a quello misurato nel riferimento inerziale *S'*, quindi l'intervallo spazio- temporale è **invariante**.

Invariante intervallo spazio – temporale: $I = \Delta s^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta r^2$

2. Significato geometrico

L'invariante intervallo spazio – temporale (d'ora in poi, per brevità, *intervallo*) consente una interessante rappresentazione degli eventi e delle loro eventuali correlazioni.

Consideriamo ora due eventi, uno, indicato con A ha coordinate spazio – temporali $x_A = 0$, $t_A = 0$; l'altro, B, ha coordinate x_B e t_B. L'intervallo Δs^2 fra i due eventi ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali e si possono verificare tre possibilità:

- $\Delta s^2 > 0$: se $c \cdot t_B > x_B$. In questo caso la distanza *spaziale* di B da A (x_A) è minore della distanza che un raggio di luce, partito da A, percorre nel tempo t_B (distanza *temporale*); l'evento B può essere *correlato* con l'evento A (cioè A può essere causa di B) in quanto le informazioni su ciò che si è verificato in A nell'istante di tempo 0 sono potute arrivare in B prima che l'evento B si verificasse. In questo caso si parla di **intervallo di tipo tempo.**
  Dato che Δs^2 ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento sarà possibile trovare un sistema di riferimento in cui $x'_B = 0$ e $t'_B > 0$ (in tal modo Δs^2 rimane maggiore di 0); ciò significa che esiste un sistema di riferimento in cui gli eventi A e B avvengono nello stesso punto dello spazio ma in istanti successivi.

  Un esempio di intervallo di tipo tempo è l'accensione e successivo spegnimento di una lampada: esiste un sistema di riferimento (quello solidale con la lampada in cui essa appare ferma) in cui i due eventi avvengono nello stesso punto ma in istanti successivi, quindi $\Delta s^2 > 0$, in tutti gli altri sistemi, in cui la lampada appare in moto e i due eventi appaiono avvenire in punti diversi, l'intervallo si mantiene positivo.

- $\Delta s^2 < 0$: se $c \cdot t_B < x_B$. In questo caso la distanza *spaziale* di B da A (x_A) è maggiore della distanza che un raggio di luce, partito da A, percorre nel tempo t_B (distanza *temporale*); l'evento B non può essere *correlato* con l'evento A (cioè A non può essere causa di B) in quanto le informazioni su ciò che si è verificato in A nell'istante 0, anche viaggiando alla velocità della luce, non sono potute arrivare in B prima che l'evento B si verificasse. In questo caso si parla di **intervallo di tipo spazio.**
  Dato che Δs^2 ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento sarà possibile trovare un sistema di riferimento in cui $x'_B > 0$ e $t'_B = 0$ (in tal modo Δs^2 rimane minore di 0); ciò significa che esiste un sistema di riferimento in cui gli eventi A e B appaiono avvenire nello stesso istante ma in punti diversi dello spazio.

  Un esempio d'intervallo di tipo spazio è il seguente: un osservatore posto al centro di un vagone di un treno vede due luci accendersi contemporaneamente[14] ai due estremi del vagone. L'evento A (accensione della luce in coda) e l'evento B (accensione della luce in testa) si verificano, secondo l'osservatore in due punti distinti ma nello stesso istante, l'intervallo Δs^2 è negativo e rimarrà tale in qualsiasi sistema di riferimento inerziale in moto rispetto a quello dell'osservatore. I due eventi A e B non sono correlati, cioè non è possibile che uno influenzi l'altro, in quanto nell'intervallo di tempo fra A e B (che nel sistema considerato vale 0!) nessuna informazione emessa da A può raggiungere B e viceversa.

[14] In realtà l'osservatore vede arrivare contemporaneamente i raggi di luce emessi da A e da B e da ciò deduce, conoscendo gli spazi percorsi, che i raggi sono stati emessi nello stesso istante.

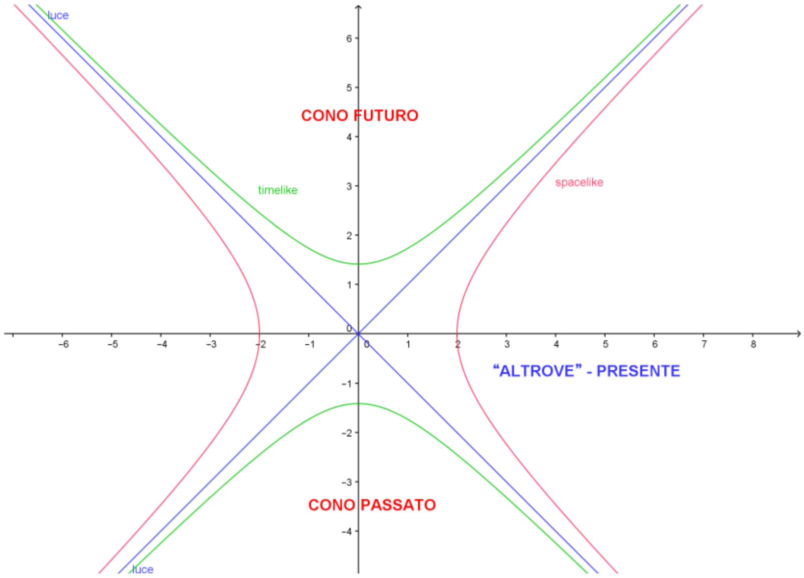
- $\Delta s^2 = 0$: se $c \cdot t_B = x_B$. In questo caso la distanza *spaziale* di B da A (x_A) è uguale alla distanza che un raggio di luce, partito da A, percorre nel tempo t_B (distanza *temporale*); l'evento B può essere *correlato* con l'evento A (cioè A può essere causa di B) in quanto le informazioni su ciò che si è verificato in A nell'istante 0, viaggiando alla velocità della luce, sono arrivate in B nell'istante in cui B si verifica. In questo caso si parla di **intervallo di tipo luce** dato che i due eventi sono legati da un raggio di luce**.**
  Dato che Δs^2 ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento sarà possibile trovare un sistema di riferimento in cui $x'_B = 0$ e $t'_B=0$ (in tal modo Δs^2 rimane uguale a 0); ciò significa che esiste un sistema di riferimento in cui gli eventi A e B appaiono avvenire nello stesso istante e nello stesso punto dello spazio.
  Un esempio d'intervallo di tipo spazio è il seguente: un osservatore posto al centro di un vagone di un treno vede una luce accendersi ad un estremo del vagone. L'evento A (partenza del raggio dall'estremo) e l'evento B (arrivo del raggio all'osservatore) si verificano, secondo l'osservatore in due punti distinti in istanti distinti ma con intervallo 0; nel sistema solidale con il raggio luminoso i due eventi si verificano nello stesso punto e nello stesso istante.

3. Diagrammi spazio – tempo, futuro e passato

Se consideriamo un diagramma cartesiano con sull'asse delle ascisse le coordinate spaziali x e sull'asse delle ordinate le quantità ct, ogni evento sarà rappresentato da un punto in tale diagramma. Tutti gli eventi correlati all'evento posto nell'origine da un intervallo di tipo luce saranno rappresentati da punti con coordinate che soddisfano l'equazione: $c^2t^2 - x^2 = 0$; questa equazione rappresenta le due bisettrici degli assi (se si considerano tre dimensioni spaziali si hanno quattro assi cartesiani e il luogo geometrico descritto è la superficie di un ipercono).

Gli eventi correlati all'evento posto nell'origine da un intervallo di tipo spazio sono rappresentati da punti che soddisfano equazioni del tipo $c^2t^2 - x^2 = k$ con $k < 0$; si tratta di una famiglia di iperboli che hanno i vertici reali sull'asse delle ascisse. Tutti questi punti giacciono all'esterno della regione delimitata dalle rette – luce; si suole dire che tali punti giacciono nel *presente* (o nell'*altrove*) rispetto all'origine. Se le coordinate spazio temporali di un evento soddisfano le condizioni per l'intervallo di tipo spazio significa che sarà sempre possibile (mediante un'opportuna Trasformazione di Lorentz) trovare un sistema di riferimento in cui l'evento avviene simultaneamente all'evento che avviene nell'origine ma in un punto distinto da essa; nessun sistema inerziale potrà osservare l'evento avvenire nell'origine (la distanza spaziale non può annullarsi, per questo si chiama di *tipo spazio*)

Gli eventi correlati all'evento posto nell'origine da un intervallo di tipo tempo sono rappresentati da punti che soddisfano equazioni del tipo $c^2t^2 - x^2 = k$ con $k > 0$; si tratta di una famiglia di iperboli che hanno i vertici reali sull'asse delle ordinate. Tutti questi punti giacciono all'interno della regione delimitata dalle rette – luce; si suole dire che tali punti giacciono nel *futuro* o nel *passato* rispetto all'origine. Se le coordinate spazio temporali di un evento soddisfano le condizioni per l'intervallo di tipo tempo significa che sarà sempre possibile (mediante un'opportuna Trasformazione di Lorentz) trovare un sistema di riferimento in cui l'evento avviene nelle stesse coordinate spaziali in cui si verifica l'evento che avviene nell'origine ma in un istante distinto da essa (quindi in un istante precedente o successivo); nessun sistema inerziale potrà osservare l'evento avvenire simultaneamente a quello che avviene nell'origine (la distanza temporale non può annullarsi, per questo si chiama di *tipo tempo*)



L'invariante Energia - Impulso

Possiamo determinare un secondo invariante che collega l'energia relativistica e la quantità di moto. Abbiamo già ricavato (pag. 30) l'invariante energia impulso ma procediamo nuovamente a ottenerlo. Elevando al quadrato le espressioni per l'energia e la quantità di moto otteniamo:

$$E^2 = m^2 c^4 \gamma^2$$
$$p^2 = m^2 v^2 \gamma^2$$

In base alla definizione del fattore γ otteniamo facilmente

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma^2 - \frac{v^2}{c^2}\gamma^2 = 1 \Rightarrow \gamma^2 c^2 - v^2\gamma^2 = c^2 \Rightarrow v^2\gamma^2 = \gamma^2 c^2 - c^2$$

Sostituendo nell'espressione per il quadrato della quantità di moto otteniamo:

$$p^2 = m^2 v^2 \gamma^2 = m^2\left(\gamma^2 c^2 - c^2\right) = m^2\gamma^2 c^2 - m^2 c^2$$

con un ultimo elementare passaggio algebrico otteniamo infine

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

Il secondo membro (m^2c^4 o m^2c^2) è **Invariante**, cioè ha lo stesso valore per tutti gli osservatori, poiché è il prodotto della massa (considerata da noi invariante) per la velocità della luce (invariante), quindi anche l'espressione al primo membro deve essere un invariante relativistico.

La grandezza $\frac{E^2}{c^2} - p^2$ (o equivalentemente la grandezza $E^2 - p^2c^2$) prende il nome di **Invariante Energia–Impulso.**

L'energia può quindi essere scritta nella forma: $\boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}$

Contrariamente all'invariante intervallo spazio tempo l'invariante energia impulso può assumere solo valori positivi o nulli (essendo uguale al prodotto m^2c^4), quindi:

- per particelle dotate di massa è sempre possibile individuare un'opportuna trasformazione di Lorentz che conduca ad un sistema di riferimento ove la quantità di moto della particella è nulla e l'energia coincide con quella di riposo, mentre è impossibile trovare un sistema di riferimento ove si annulli l'energia.
- per particelle prive di massa (come i fotoni) non è possibile individuare un riferimento in cui si annulli la quantità di moto (si annullerebbe anche l'energia e la particella cesserebbe di esistere non avendo più alcuna proprietà fisica misurabile: ne massa, ne energia, ne quantità di moto)

4. Gli invarianti come "lunghezza" quadridimensionale (approfondimento)

Riprendiamo in considerazione il comportamento delle coordinate spazio - temporali e del quadrivettore energia - impulso.

Indichiamo il 4 - vettore "coordinate temporali" con la notazione

$$x^i = (ct; x; y; z) = (x_0; x_1; x_2; x_3)$$

Analogamente indichiamo il 4 - vettore "energia - impulso" (che ha come prima componente la grandezza scalare energia e come componenti successive - spaziali - le componenti del 3 - vettore impulso) con la simbologia

$$p^i = \left(\frac{E}{c}; p_x; p_y; p_z\right) = (p_0; p_1; p_2; p_3)$$

I due invarianti che abbiamo individuato sono scrivibili nella forma:

$$\Delta s^2 = x_0^2 - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) = x_0^2 - \vec{x}^2$$

$$(mc)^2 = p_0^2 - \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) = p_0^2 - \vec{p}^2$$

Entrambe le espressioni hanno la stessa forma, ossia sono formate dal quadrato della prima componente (scalare, "temporale") a cui viene sottratto il quadrato del trivettore; questa forma ha una forte somiglianza con l'usuale distanza tra due punti nello spazio euclideo (in uno spazio euclideo bidimensionale la distanza tra due punti si ottiene con l'usuale Teorema di Pitagora che può essere esteso agevolmente a spazi con un numero qualsiasi di dimensioni), la differenza fondamentale risiede nel fatto che anziché sommare i quadrati di tutte le componenti si sottraggono i quadrati delle componenti "spaziali" (seconda, terza e quarta).

Per quanto riguarda l'intervallo spazio - tempo è estremamente ragionevole aspettarsi che esso rappresenti la "**distanza quadridimensionale**" tra eventi nello spazio tempo, proprio per il fatto che esso rimane invariante per Trasformazioni di Lorentz (ossia la distanza quadridimensionale è la stessa per tutti i sistemi di riferimento inerziali) in analogia con l'usuale distanza tridimensionale euclidea che rimane invariante per Trasformazioni di Galilei ma anche, più in generale per traslazioni e rotazioni. Si può dimostrare[15] che le Trasformazioni di Lorentz corrispondono a "rotazioni iperboliche" nel piano (x, t)

Il fatto che l'invariante energia - impulso abbia la stessa forma matematica dell'intervallo spazio - tempo e che le sue componenti trasformino esattamente come le componenti del 4 - vettore x^i

[15] Vedi Appendice H

suggerisce che anche l'invariante energia - impulso non sia altro che la "*lunghezza*" (al quadrato!) del quadrivettore.

Invarianti elettromagnetici

Anche per le grandezze che descrivono il campo elettromagnetico si possono trovare alcuni invarianti.

Si può dimostrare (utilizzando le trasformazioni del campo elettrico e magnetico) che vi sono due invarianti:

$$H^2 - E^2 = \text{invariante}$$

$$\vec{H} \cdot \vec{E} = \text{invariante}$$

in queste equazioni si utilizza il vettore ***H*** che è legato al vettore ***B*** (utilizzato di norma nell'insegnamento liceale) dalla relazione $\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right)$ ove ***M*** è legato ai momenti magnetici intrinseci (nei materiali) mentre H dipende da 4 possibili contributi, ma nel vuoto dipende solo da eventuali correnti dovute a cariche libere e dalle variazioni di campo elettrico.
In sostanza se ci si occupa di campi generati da correnti e/o da campi elettrici $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Le due relazioni precedenti ci dicono che:

- se in qualche sistema di riferimento K i campi elettrico e magnetico sono perpendicolari (e quindi il loro prodotto scalare è nullo) allora saranno perpendicolari in tutti i sistemi di riferimento (quindi se osserviamo un'onda piana soluzione delle Equazioni di Maxwell osserveremo un'oda piana in ogni sistema inerziale)
- se in qualche sistema inerziale il moduli dei campi sono uguali lo sono in qualsiasi sistema inerziale.

Appendici

Appendice A: Una deduzione per le Trasformazioni di Lorentz

Cerchiamo di costruire delle trasformazioni delle coordinate che abbiano le seguenti **caratteristiche**:

a) Si riducano alle consuete trasformazioni di Galilei nel caso in cui sia le velocità dei corpi in moto sia le velocità relative dei sistemi di riferimento siano piccole rispetto alla velocità della luce ($\frac{v}{c} << 1$);

b) conducano ad una legge di composizione delle velocità che soddisfi il postulato dell'invarianza della velocità della luce nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro.

Considereremo due sistemi inerziali *S* e *S'* aventi le origini e gli assi coincidenti nell'istante $t = 0$; il sistema *S'* si muoverà di moto rettilineo uniforme con velocità *v* rispetto a *S* diretta lungo l'asse *x* comune.

Dato che vogliamo ritrovare le consuete trasformazioni di Galilei è ragionevole **ipotizzare** che anche le nuove trasformazioni che stiamo cercando siano **lineari** in *x* e *t* e quindi la trasformazione per la coordinata *x* sia della forma

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad (1)$$

ove il fattore γ non contiene le coordinate ma contiene ragionevolmente *v* e *c* (è ragionevole che *c* compaia nelle nuove trasformazioni dato che è a causa della sua invarianza che le Trasformazioni galileiane perdono efficacia).

Per ragioni di consistenza dimensionale il fattore γ deve essere **adimensionale** e quindi possiamo ipotizzare contenga il rapporto tra le due velocità $\frac{v}{c}$; dato che vogliamo (condizione **a**) ritrovare le T.G. per basse velocità allora sarà necessario che per $v<<c$ sia $\gamma \to 1$.

Per ragioni di simmetria la modifica che vogliamo effettuare **non deve dipendere dal verso** con cui S' si muove rispetto a S, ciò significa che è ragionevole attendersi che γ sia una funzione di $\frac{v^2}{c^2}$

La modifica finora proposta, *da sola*, non soddisfa tutte le condizioni chieste, infatti:

supponiamo che al tempo $t = 0$, quando $O \equiv O'$, siano emessi due lampi di luce in entrambi i sistemi nella direzione positiva dell'asse *x*; ad un tempo successivo *t* i lampi avranno raggiunto le coordinate:

$$x = ct \qquad\qquad x' = ct' \qquad (2)$$

usiamo la (1):

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt) = \gamma t(c - v) = ct'$$

quindi, se $t = t'$ (secondo meccanica newtoniana) otteniamo

$$\gamma t(c - v) = ct \Rightarrow c = \gamma(c - v)$$

e quindi

$$\gamma = \frac{c}{c-v} = \frac{1}{1-\frac{v}{c}}$$

Questo risultato non è accettabile in quanto γ dipenderebbe dal segno (e quindi dal verso) della velocità *v* e ciò è escluso per ragioni di simmetria.
Appare quindi necessario modificare anche la relazione per la trasformazione dei tempi. Come?
é ragionevole supporre che la trasformazione per i tempi abbia una forma simile a quella delle coordinate, quindi che sia della forma:

$$t' = \gamma(t - ax) \qquad (3)$$

ove *a* è un parametro che dobbiamo determinare.
Imponiamo che due lampi di luce emessi dall'origine nei due sistemi di riferimento abbiano la stessa velocità *c*, ossia che valga la (2)

$$x' = ct' \rightarrow x' = \gamma(x - vt) = \gamma t(c-v) = ct' = c\gamma(t - ax) = c\gamma(t - act) = c\gamma(1 - ac)t$$

quindi

$$t(c-v) = c(1-ac)t$$

$$c - v = c - ac^2$$

$$a = \frac{v}{c^2}$$

Quindi la trasformazione per i tempi è:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad (4)$$

Ci manca ancora la forma esatta della funzione γ, per ottenerla possiamo considerare le trasformazioni inverse, che fanno passare da S' a S; ovviamente avranno la stessa forma della (1) e della (4) ma con segno di *v* cambiato:

$$x = \gamma(x' + vt') \qquad (5)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \qquad (6)$$

Sostituiamo in (5) le espressioni di *x* e *t* ottenute con (1) e (4):

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma\left[\gamma(x - vt) + v\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\right] = \gamma^2\left(x - vt + vt - \frac{v^2}{c^2}x\right)$$

$$x = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x$$

Affinché l'identità sia soddisfatta deve valere:

$$\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1\Rightarrow$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Abbiamo ottenuto le **Trasformazioni di Lorentz** e possiamo verificare che le condizioni che abbiamo richiesto sono verificate).

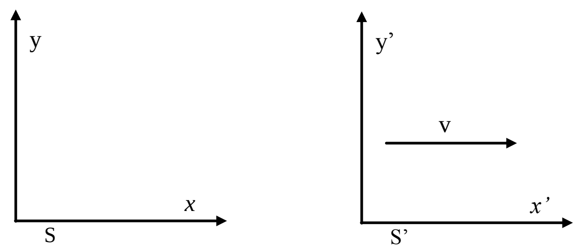
Appendice B: Deduzione della dilatazione dei tempi dalle Trasformazioni di Lorentz

Consideriamo un orologio fermo nell'origine sistema di riferimento S' e il tempo impiegato dalle lancette per compiere un giro completo secondo S': $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. L'osservatore S vede il sistema S' in moto con velocità v e quindi giudica che i due passaggi della lancetta per le ore 12 avvengano quando l'orologio si trova in punti distinti del proprio sistema di riferimento x_2 e x_1, usando le trasformazioni di Lorentz per i tempi t_2 e t_1 si ottiene:

$t_2=\gamma\left(t'_2+\frac{vx'_2}{c^2}\right)$ e $t_1=\gamma\left(t'_1+\frac{vx'_1}{c^2}\right)$ da cui calcolando la differenza si ottiene, ricordando che $x'_2 = x'_1$, la regola per la dilatazione dei tempi.

Appendice C: Derivazione della legge di contrazione delle lunghezze dalle T.L.

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali S e S' e per semplicità consideriamo che il moto relativo avvenga lungo la direzione comune degli assi x e x':



Consideriamo una sbarra in quiete nel sistema S' con gli estremi posti in x'_2 e x'_1, la lunghezza della sbarra secondo S' è $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ (lunghezza propria o di riposo).
La lunghezza secondo l'osservatore S (che vede la sbarra muoversi con velocità v) sarà data dalla distanza fra le posizioni dei due estremi della sbarra, x_2 e x_1, misurate nello stesso istante (secondo S). Utilizziamo le trasformazioni di Lorentz che danno le coordinate in S' in funzione delle coordinate in S:

$x_1'=\gamma(x_1-vt_1)$ e $x_2'=\gamma(x_2-vt_2)$, poiché $t_1 = t_2$ si ottiene subito che $x_2'-x_1'=\gamma(x_2-x_1)$ da cui dividendo per γ si ottiene la relazione per la contrazione delle lunghezze.

Appendice D: Deduzione della formula per la relatività della simultaneità dalle T.L.

Consideriamo due eventi A e B; secondo un osservatore posto nel sistema inerziale S i due eventi sono caratterizzati dalle coordinate $A(x_A;t_A)$, $B(x_B;t_B)$ (per semplicità consideriamo una sola coordinata spaziale, *x*, ma tutte le considerazioni si possono facilmente estendere a tre dimensioni). Supponiamo che *S* giudichi A e B simultanei ($t_A = t_B$). Consideriamo un osservatore solidale al sistema inerziale *S'*, che si muove con velocità *v* rispetto a *S*. L'intervallo di tempo fra i due eventi A e B, misurato da S' è $\Delta t' = t_B - t_A$; utilizzando le trasformazioni di Lorentz si ottiene:

$\Delta t' = \gamma\left(t_b - \frac{x_B v}{c^2}\right) - \gamma\left(t_A - \frac{x_A v}{c^2}\right)$, utilizzando il fatto che $t_A = t_B$, si ottiene $\Delta t' = \gamma\left(\frac{x_B v}{c^2} - \frac{x_A v}{c^2}\right) = (x_B - x_A)\gamma \frac{v}{c^2}$.

Appendice E: Deduzione delle leggi di trasformazione delle velocità

Consideriamo il caso semplice in cui si abbiano due sistemi di riferimento inerziali S e S' in moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro con velocità v lungo l'asse comune delle ascisse. Supponiamo che una particella si muova rispetto al sistema S' con velocità **u'** di componenti u'_x e u'_y, vogliamo calcolare le componenti della velocità secondo l'osservatore S.

Ricordiamo che la velocità è definita come derivata della posizione rispetto al tempo perciò:

$u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$, $u'_y = \frac{dy'}{dt'}$

utilizzando le trasformazioni di Lorentz $x = \gamma(x' + vt')$ e $t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$ e differenziando si ottiene: $dx = \gamma(dx' + vdt')$, $dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)$ e $dy = dy'$ perciò dividendo la prima per la seconda si ottiene mediante semplici passaggi algebrici:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{dt'\left(\frac{dx'}{dt'} + v\right)}{dt'\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x \frac{v}{c^2}}$$

dividendo la terza per la seconda si ottiene la legge per la componente y della velocità e analogamente si opera per la componente z (i calcoli sono lasciati come esercizio).

Appendice F: Verifica dell'invarianza sotto Trasformazioni di Lorentz della conservazione della quantità di moto

Abbiamo dimostrato che la definizione classica della quantità di moto porta a una non invarianza del Principio di conservazione della quantità di moto rispetto alle Trasformazioni di Lorentz.

Abbiamo proceduto a definire la quantità di moto relativistica in modo che la componente *y* (ma anche la componente *z*) risulti invariante sotto trasformazioni di Lorentz (si noti che è addirittura la componente ad essere invariante quindi sarà invariante la conservazione della componente *y*).

Nella nuova definizione le componenti dell'impulso contengono tutte le quantità invarianti *m* (massa) e $\Delta\tau$ (intervallo di tempo proprio, quindi misurato nel riferimento in cui la particella è in quiete):

$$p_x = m\frac{\Delta x}{\Delta\tau} \quad p_y = m\frac{\Delta y}{\Delta\tau} \quad p_z = m\frac{\Delta z}{\Delta\tau} \qquad (1)$$

Nelle relazioni precedenti $\Delta\tau$ (l'intervallo di tempo proprio) è legato all'intervallo di tempo Δt misurato nel riferimento *K* in cui stiamo calcolando la quantità di moto dalla relazione

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ove la velocità che compare è proprio quella della particella rispetto al riferimento inerziale *K* (ossia la velocità relativa del sistema di riferimento *K* rispetto al sistema di riferimento S in cui la particella è in quiete).

Vogliamo verificare che con questa nuova definizione il *Principio di Conservazione della Quantità di Moto* è invariante rispetto alle Trasformazioni di Lorentz (se vale in un riferimento inerziale, vale in qualsiasi altro riferimento inerziale).
Per procedere nella dimostrazione è conveniente, in via preliminare, dedurre le Trasformazioni per le componenti della quantità di moto (il che è abbastanza semplice).

1) Le trasformazioni per le componenti della quantità di moto

In base alle nostre definizioni (1) le componenti dell'impulso (consideriamo per comodità di calcolo e per più agevole comprensione da parte degli studenti i valori medi, ma l'estensione ai valori istantanei è immediata) sono proporzionali alle variazioni delle coordinate mediante il fattore $m\frac{1}{\Delta\tau}$ che è un **invariante**, quindi (ricordando che, per la dilatazione dei tempi, $\Delta t = \gamma_v \Delta\tau$, ove con γ_v si intende il fattore di Lorentz contenente la velocità della particella rispetto a K) indicando con γ_u il fattore di Lorentz contenente la velocità del riferimento inerziale K' rispetto a K:

$$p'_x = m\frac{\Delta x'}{\Delta\tau} = m\frac{1}{\Delta\tau}\Delta[\gamma_u(x-ut)] = m\frac{1}{\Delta\tau}[\gamma_u(\Delta x - u\Delta t)] = m\left[\gamma(u)\left(\frac{\Delta x}{\Delta\tau} - u\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right)\right] = \gamma_u(p_x - m\gamma_v u)$$

$$p'_y = m\frac{\Delta y'}{\Delta\tau} = m\frac{\Delta y}{\Delta\tau} = p_y \qquad p'_z = m\frac{\Delta z'}{\Delta\tau} = m\frac{\Delta z}{\Delta\tau} = p_z$$

Riassumendo[16]

$$p'_x = \gamma_u(p_x - m\gamma_v u) \qquad p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z \qquad (2)$$

Ora utilizzeremo le relazioni precedenti per studiare l'urto tra due particelle in diversi sistemi di riferimento.

2) Urto tra due particelle nel Sistema di Riferimento del Centro di Massa

Consideriamo l'urto tra due particelle, con masse m_A e m_B, nel riferimento del centro di massa, ove, per definizione, si ha (indicando con $\vec{p}$ le quantità di moto prima dell'urto):

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = 0$$

e quindi (per componenti)

$$p_{B,x} = -p_{A,x} \qquad p_{B,y} = -p_{A,y}$$

Supponiamo che in questo riferimento inerziale valga la conservazione della quantità di moto, e quindi (indicando con $\vec{q}$ le quantità di moto dopo l'urto e con γ_A^* i fattori di Lorentz dopo l'urto)

$$\vec{q}_A + \vec{q}_B = 0$$

da cui si ottiene

$$q_{B,x} = -q_{A,x} \qquad q_{B,y} = -q_{A,y}$$

Utilizzeremo ora le trasformazioni (2) per passare ad un altro sistema inerziale in moto a velocità relativa u rispetto al sistema K del centro di massa.

[16] Dopo aver ricavato l'energia relativistica $E = m\gamma c^2$ sarà agevole sostituire a $m\gamma$ il termine E/c^2

3) Urto tra due particelle in un sistema inerziale in moto relativo rispetto a K

Trasformiamo le componenti della quantità di moto prima dell'urto (indicheremo con γ_A, γ_B i fattori di Lorentz che contengono le velocità delle particelle rispetto al riferimento inerziale *K*):

$$\begin{aligned}
p'_{A,x} &= \gamma_u\left(p_{A,x} - m_A\gamma_A u\right)\\
p'_{B,x} &= \gamma_u\left(p_{B,x} - m_B\gamma_B u\right) = \gamma_u\left(-p_{A,x} - m_B\gamma_B u\right)\\
p'_{A,y} &= p_{A,y}\\
p'_{B,y} &= p_{B,y}
\end{aligned}$$

Trasformiamo le componenti della quantità di moto dopo dell'urto:

$$\begin{aligned}
q'_{A,x} &= \gamma_u\left(q_{A,x} - m_A\gamma^*_A u\right)\\
q'_{B,x} &= \gamma_u\left(q_{B,x} - m_B\gamma^*_B u\right) = \gamma_u\left(-q_{A,x} - m_B\gamma^*_B u\right)\\
q'_{A,y} &= q_{A,y}\\
q'_{B,y} &= q_{B,y}
\end{aligned}$$

Calcoliamo ora la quantità di moto (per componenti) totale prima e dopo dell'urto:

$$\begin{aligned}
p'_x &= p'_{A,x} + p'_{B,x} = \gamma_u\left(p_{A,x} - m_A\gamma_A u\right) + \gamma_u\left(-p_{A,x} - m_B\gamma_B u\right) = -u\gamma_u\left(\gamma_A m_A + \gamma_B m_B\right)\\
p'_y &= p'_{A,y} + p'_{B,y} = p_{A,y} + p_{B,y}\\
q'_x &= q'_{A,x} + q'_{B,x} = \gamma_u\left(q_{A,x} - m_A\gamma_A u\right) + \gamma_u\left(-q_{A,x} - m_B\gamma_B u\right) = -u\gamma_u\left(\gamma^*_A m_A + \gamma^*_B m_B\right)\\
q'_y &= q'_{A,y} + q'_{B,y} = q_{A,y} + q_{B,y} = p_{A,y} + p_{B,y}
\end{aligned}$$

Appare quindi evidente che, mentre lungo l'asse *y* la quantità di moto è sicuramente conservata, se si vuole ottenere la conservazione per la componente x anche nel sistema *K'* è necessario che

$$\left(\gamma_A m_A + \gamma_B m_B\right) = \left(\gamma^*_A m_A + \gamma^*_B m_B\right)$$

ma questa è la **conservazione dell'energia relativistica** e quindi è vera (o meglio se vogliamo l'invarianza del principio di conservazione della QdM assieme dobbiamo chiedere la conservazione dell'energia)

Per concludere possiamo anche procedere a rifare la dimostrazione partendo da un sistema inerziale qualsiasi *K* in cui supponiamo che il principio sia soddisfatto; utilizzando le consuete notazioni abbiamo:

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{q}_A + \vec{q}_B$$

da cui

$$p_{A,x} + p_{B,x} = q_{A,x} + q_{B,x} \qquad (3.1) \qquad p_{A,y} + q_{B,y} = q_{A,y} + q_{B,y} \qquad (3.2)$$

Utilizziamo le trasformazioni (2) e calcoliamo le quantità di moto totali prima e dopo l'urto, lungo i due assi, nel nuovo rifermento inerziale *K'*:

Asse *x*:

$$p'_{A,x} + p'_{B,x} = \gamma_u\left(p_{A,x} - u\gamma_A m_A\right) + \gamma_u\left(p_{B,x} - u\gamma_B m_B\right) = \gamma_u\left(p_{A,x} + p_{B,x}\right) - u\gamma_u\left(\gamma_A m_A + \gamma_B m_B\right)$$

$$q'_{A,x} + q'_{B,x} = \gamma_u\left(q_{A,x} - u\gamma_A m_A\right) + \gamma_u\left(q_{B,x} - u\gamma_B m_B\right) = \gamma_u\left(q_{A,x} + q_{B,x}\right) - u\gamma_u\left(\gamma^*_A m_A + \gamma^*_B m_B\right)$$

utilizzando la (3.1) e, come nel caso precedente, otteniamo che per avere la conservazione della quantità di moto anche nel sistema *K'* è necessario che valga la relazione

$$\left(\gamma_A m_A + \gamma_B m_B\right) = \left(\gamma_A^* m_A + \gamma_B^* m_B\right)$$

ossia è necessario che sia valido il Principio di Conservazione dell'Energia Relativistica

$$p'_{A,x} + p'_{B,x} = q'_{A,x} + q'_{B,x}$$

Asse *y*:
Dato che lungo l'asse *y* le componenti della quantità di moto non cambiano è immediato che la quantità di moto totale non cambia nell'interazione.

Quindi abbiamo ottenuto in modo del tutto generale, a partire dalla nostra definizione di quantità di moto e utilizzando il *Principio di conservazione dell'energia*, che "*Se il principio di conservazione della quantità di moto è soddisfatto in un riferimento inerziale K lo è anche in qualsiasi altro sistema inerziale K'*", ossia il **Principio di conservazione della quantità di moto soddisfa il Postulato di relatività**.

Appendice G: L'introduzione dell'energia relativistica mediante invarianti

Un modo alternativo per introdurre l'energia relativistica è basato sulla ricerca di invarianti e sulla manipolazione di espressioni. La nuova definizione di energia è introdotta nel modo seguente:

1) Consideriamo l'espressione $\gamma^2 - \frac{v^2}{c^2}\gamma^2$, semplici calcolo mostrano che essa vale 1;

2) Moltiplichiamo l'identità $\gamma^2 - \frac{v^2}{c^2}\gamma^2 = 1$ per la quantità m^2c^4 ottenendo: $m^2c^4\gamma^2 - m^2v^2\gamma^2c^2 = m^2c^4$, notiamo che il secondo termine contiene $m^2v^2\gamma^2 = p^2$, perciò abbiamo l'espressione:

$$\boxed{m^2c^4\gamma^2 - c^2p^2 = m^2c^4}$$

3) Si effettuano le seguenti considerazioni:

a) Il secondo membro (m^2c^4) è **Invariante**, cioè ha lo stesso valore per tutti gli osservatori, poiché è il prodotto della massa (considerata da noi invariante) per la velocità della luce (invariante), quindi anche l'espressione al primo membro deve essere un invariante relativistico;

b) Sia il termine c^2p^2 che il termine m^2c^4 hanno le **dimensioni di un'energia al quadrato** e quindi rappresentano energie al quadrato, quindi anche il termine $m^2c^4\gamma^2$ deve rappresentare una energia al quadrato;

c) L'espressione $mc^2\gamma$ (il cui significato per ora è ignoto) quindi deve rappresentare un'energia e può essere riscritta in forma approssimata utilizzando lo stesso procedimento visto nel paragrafo precedente: $mc^2\gamma \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$ valida se $\frac{v^2}{c^2} << 1$;

d) Quindi se si è in approssimazione non relativistica ($\frac{v}{c} << 1$) si ottiene

$$\boxed{mc^2\gamma \cong mc^2 + \frac{1}{2}mv^2}$$

e) Questa espressione ci indica che $mc^2\gamma$ rappresenta, tranne che per la costante additiva mc^2, **l'energia cinetica (non relativistica) della particella.**

Conclusioni

1) L'espressione $m^2c^4\gamma^2 - c^2p^2$ è un invariante relativistico (**Invariante Energia–Impulso**);

2) Il termine $mc^2\gamma$, il cui quadrato compare nell'espressione, rappresenta un'energia e in approssimazione non relativistica coincide con l'energia cinetica, quindi siamo autorizzati a definirlo come **energia relativistica**:

$$\boxed{E_R = mc^2\gamma}$$

3) L'energia può quindi essere scritta nella forma:

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}$$

4) A bassa velocità l'espressione $mc^2\gamma$ è ben approssimata dall'usuale formula per l'energia cinetica, ma quando v si avvicina a c (situazioni relativistiche) è necessario cambiare l'espressione per **l'energia cinetica,** considerando che l'energia sia data da due contributi, uno dato dal termine costante mc^2 (equivalenza fra massa ed energia!), e uno dato da un termine cinetico che sarà esprimibile con:

$$\boxed{E_C = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)}$$

Note finali

1) Il termine mc^2 rappresenta l'energia che il corpo possiede anche se è in quiete, è l'energia posseduta per il semplice fatto di avere una massa e viene chiamata **energia di riposo** (**o della massa a riposo**). Si tratta di un concetto fondamentale perché indica che è possibile trasformare massa in energia e, viceversa, energia in massa:
   a) Annichilazioni: in molti esperimenti si fanno collidere particelle con antiparticelle, in tal caso si ha completa annichilazione della materia (le particelle spariscono) e compare energia radiante (cioè fotoni); anche nei fenomeni di fissione nucleare si osserva una perdita di massa con produzione di energia;
   b) Creazione di massa: normalmente negli acceleratori si creano nuove particelle facendo collidere particelle leggere che si muovono ad alta velocità, si annichilano, liberano energia in grande quantità che poi può dare origine a nuove particelle.

2) Le formule per l'energia relativistica valgono anche per le particelle prive di massa come i fotoni, per esse si ottiene: $E = pc$

Appendice H: Rotazioni iperboliche

Le funzioni iperboliche sono collegate alla funzione esponenziale dalle relazioni:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad\qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

per esse la relazione "goniometrica" fondamentale ha la forma

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

ovviamente legata al fatto che, mentre per le usuali funzioni goniometriche la definizione originale prende origine da una circonferenza ($x^2 + y^2 = 1$), per le funzioni iperboliche la definizione prende origine da un'iperbole ($x^2 - y^2 = 1$).

Le rotazioni iperboliche sono trasformazioni geometriche che collegano le "vecchie" e le "nuove" coordinate in modo analogo alle consuete rotazioni, utilizzando però, al posto delle usuali funzioni goniometriche, le funzioni iperboliche:

$$\begin{cases} x = x' \cosh\varphi + ct' \sinh\varphi \\ ct = x' \sinh\varphi + ct' \cosh\varphi \end{cases}$$

semplice verificare che queste rotazioni iperboliche lasciano invariato l'intervallo spazio - tempo, infatti:

$$\begin{cases} x^2 = x'^2 \cosh^2\varphi + c^2 t'^2 \sinh^2\varphi + 2x'ct' \cosh\varphi \sinh\varphi \\ (ct)^2 = x'^2 \sinh^2\varphi + (ct')^2 \cosh^2\varphi + 2x'ct' \cosh\varphi \sinh\varphi \end{cases}$$

quindi sottraendo per ottenere l'intervallo spazio tempo $\Delta s^2 = (ct)^2 - x^2$ si ha

$$(ct)^2 - x^2 = (x')^2 \sinh^2\varphi + (ct')^2 \cosh^2\varphi + 2x'ct' \cosh\varphi \sinh\varphi - \left(x'^2 \cosh^2\varphi + c^2 t'^2 \sinh^2\varphi + 2x'ct' \cosh\varphi \sinh\varphi\right)$$

sfruttando l'identità fondamentale $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ otteniamo infine, dopo aver raccolto a fattore comune,

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2\left[\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi\right] - x'^2\left[\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi\right] = (ct')^2 - x^2$$

Quindi nello spazio quadri-dimensionale le rotazioni iperboliche lasciano invariata la "lunghezza" quadridimensionale dei 4 - vettori.

Si può infine dimostrare che le Trasformazioni di Lorentz sono rotazioni iperboliche con angolo espresso dalla relazione

$$\tanh\varphi = \frac{v}{c}$$

per farlo è sufficiente considerare il moto dell'origine del sistema inerziale S' rispetto a S (quindi x'=0)

$$\begin{cases} x = ct' \sinh\varphi \\ ct = ct' \cosh\varphi \end{cases}$$

da cui dividendo membro a membro otteniamo la relazione precedente.

Sommario